

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO  
CÂMPUS VOTUPORANGA

GUILHERME DOS SANTOS SILVA

**MÓDULO DE *SOFTWARE*: MÉTODO DE NAVIER PARA  
ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS RETANGULARES QUADRIAPOIADAS**

VOTUPORANGA

2022

Guilherme dos Santos Silva

**MÓDULO DE *SOFTWARE*: MÉTODO DE NAVIER PARA  
ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS RETANGULARES QUADRIAPOIADAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Votuporanga.

Professor Orientador: M.e. Gustavo Cabrelli Nirschl.

Votuporanga  
2022

## FICHA CATALOGRÁFICA

S586m Silva, Guilherme dos Santos, 2000-  
Módulo de software: método de Navier para análise estrutural de placas retangulares quadriapoiadas – Câmpus Votuporanga / Guilherme dos Santos Silva – Votuporanga, 2022.  
113 p. : il. color.; 29,8 cm.  
Bibliografia: p. 83-85

Orientador: Gustavo Cabrelli Nirschl  
Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, 2022.

1. Programa para análise de lajes. 2. Procedimentos de cálculos - Exibição. 3. Navier para análise de lajes. 4. Análise estrutural de lajes. 5. Análise de estruturas. I. Título.

CDD – 624.171

ATA N.º 103/2022 - DAE-VTP/DRG/VTP/IFSP

Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso - Graduação

Na presente data realizou-se a sessão pública de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso intitulado MÓDULO DE SOFTWARE: MÉTODO DE NAVIER PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS RETANGULARES QUADRIAPOIADAS apresentado(a) pelo(a) aluno(a) GUILHERME DOS SANTOS SILVA (VP3000478) do Curso SUPERIOR EM Engenharia Civil, (Câmpus Votuporanga). Os trabalhos foram iniciados às 10:00h pelo(a) Professor(a) presidente da banca examinadora, constituída pelos seguintes membros:

Membros	IES	Presença (Sim/Não)	Aprovação/Conceito (Quando Exigido)
Prof. M.e. Gustavo Cabrelli Nirschl (Presidente/Orientador)	IFSP-Votuporanga	Sim	Aprovado
Profª. Dra. Mara Regina Pagliuso Rodrigues (Examinador 1)	IFSP-Votuporanga	Sim	Aprovado
Prof. Dr. Ivan Oliveira Lopes (Examinador 2)	IFSP-Votuporanga	Sim	Aprovado

Observações:

A banca examinadora, tendo terminado a apresentação do conteúdo da monografia, passou à arguição do(a) candidato(a). Em seguida, os examinadores reuniram-se para avaliação e deram o parecer final sobre o trabalho apresentado pelo(a) aluno(a), tendo sido atribuído o seguinte resultado:

[ X ] Aprovado(a)                      [ ] Reprovado(a)                      Nota (quando exigido): \_\_\_\_\_

Proclamados os resultados pelo presidente da banca examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, eu lavrei a presente ata que assino juntamente com os demais membros da banca examinadora.

Câmpus Votuporanga, 10 de novembro de 2022

Avaliador externo: [ ] Sim [X] Não

Assinatura:

Documento assinado eletronicamente por:

- Gustavo Cabrelli Nirschl, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/11/2022 10:43:10.
- Mara Regina Pagliuso Rodrigues, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/11/2022 10:49:00.
- Ivan Oliveira Lopes, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO, em 10/11/2022 10:51:39.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 10/11/2022. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifsp.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador: 445350  
Código de Autenticação: b46fad9790



*Dedico esse trabalho aos meus pais, que estiveram presentes e me apoiaram nas horas difíceis a fim de realizar esse sonho.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Terezinha e Gileno, que me apoiaram nessa trajetória, sempre com os mais variados incentivos, para que eu pudesse realizar esse sonho e chegar até aqui.

Agradeço a minha namorada, Assucena, que me auxiliou emocionalmente e me ensinou, mesmo que indiretamente, a enxergar as coisas de maneira mais simples e objetiva.

A todos os professores e servidores do IFSP Campus Votuporanga que contribuíram direta ou indiretamente para um ensino teórico e prático de qualidade, que com certeza levarei para a vida.

Agradeço também ao meu orientador, M.e. Gustavo Cabrelli Nirschl, o qual considero um amigo e pelos seus ensinamentos, compreensão, disponibilidade e paciência pude vencer tantos desafios.

*"O primeiro passo é estabelecer que algo é possível, então a probabilidade ocorrerá".*

*Elon Musk*

## RESUMO

Atualmente existem inúmeros programas de computador que realizam cálculos para problemas de engenharia, mas a sua maioria mostra somente os resultados finais e não os procedimentos até se chegar neles. Tendo em vista tal problemática, elaborou-se um módulo nas linguagens *web* (HTML/*JavaScript*) que permite a análise estrutural de lajes simplesmente apoiadas pelo método de Navier. O diferencial do módulo, em relação a outros *softwares*, é a exibição de todos os procedimentos de cálculos em relatórios gerados dinamicamente no formato PDF (*portable document format*). Tal módulo foi implementado em um *software web* já existente que permitia somente o desenho de lajes, chamado IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), criado pelo grupo de pesquisa NEVE, do IFSP campus Votuporanga. O módulo aqui apresentado se mostra eficaz na criação dos diagramas de deslocamento e esforços, evidenciando que os resultados das funções de Navier são satisfatórios, e elabora um relatório que poderá ser utilizado como material de apoio a estudantes, professores e profissionais.

**Palavras-chave:** Programa para análise de lajes. Exibição dos procedimentos de cálculos. Navier para análise de lajes. Análise estrutural de lajes.



## ABSTRACT

There are numerous softwares that perform calculations for engineering problems, but most of them only show the final results and not the procedures until they are reached. In view of this problem, a module was developed in web languages (HTML/JavaScript) that allows the structural analysis of slabs simply supported by the Navier method. The module's differential, in relation to other software, is the display of all calculation procedures in dynamically generated reports in PDF (portable document format). This module was implemented in an existing web software that only allowed the design of slabs, called IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), created by the research group NEVE, from the IFSP campus Votuporanga. The module presented here proves to be effective in creating displacement and effort diagrams, showing that the results of Navier's functions are satisfactory, and prepares a report that can be used as support material for students, professors and professionals.

**Keywords:** Slab analysis software. Display of evaluation procedures. Navier for slab analysis. Structural analysis of slabs.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Lajes de uma edificação.....	18
Figura 2 – Esquema de uma placa.....	19
Figura 3 – Planos de corte $S_1$ e $S_2$ em uma laje.....	20
Figura 4 – Seção $S_1$ antes e depois do carregamento.....	21
Figura 5 – Deformações de um elemento no plano x-y.....	23
Figura 6 – Tensões em um elemento infinitesimal de laje.....	25
Figura 7 – Equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal de laje.....	26
Figura 8 – Carga sobre região retangular. ....	32
Figura 9 – Propagação da carga móvel na laje.....	32
Figura 10 – Conjunto de Cargas Trem-Tipo TB450. Cotas em metro.....	33
Figura 11 – Atributos de um elemento.....	35
Figura 12 – Origem dos eixos do elemento <i>canvas</i> . ....	36
Figura 13 – Palavras reservadas em um código <i>JavaScript</i> . ....	37
Figura 14 – Exemplo de alertas gerados pelo <i>SweetAlert2</i> .....	38
Figura 15 – Principais funcionalidades do <i>Robot</i> . ....	40
Figura 16 – Principais funcionalidades do RFEM 5.....	41
Figura 17 – Módulos adicionais RFEM 5.....	41
Figura 18 – Configurações da malha de elementos finitos.....	42
Figura 19 – Parâmetros de cálculos RFEM 5.....	42
Figura 20 – Metodologia do trabalho.....	43
Figura 21 – Tela completa do IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020).....	44
Figura 22 – Fluxograma de entrada no módulo.....	48
Figura 23 – Fluxograma geral do resultado pontual.....	49
Figura 24 – Fluxograma referente a tabela de resultados.....	50
Figura 25 – Fluxograma geral da criação do relatório.....	51
Figura 26 – Fluxograma geral da geração dos diagramas de deslocamento e esforços. .....	52
Figura 27 – Tela principal do módulo (saída de dados). ....	53
Figura 28 – Menus dos Diagramas. ....	54
Figura 29 – Exemplo de acesso ao diagrama. ....	54
Figura 30 – Exemplo de diagrama com mudança de intervalo.....	55
Figura 31 – Opções de intervalos.....	55

Figura 32 – Botão mostrar.....	56
Figura 33 – Processo do Resultado Pontual. ....	56
Figura 34 – Seleção para geração da tabela de resultados. ....	57
Figura 35 – Tabela de resultados. ....	57
Figura 36 – Coordenadas para emissão do relatório. ....	58
Figura 37 – Parte do relatório – dados de entrada e introdução teórica.....	58
Figura 38 – Relatório – parte da resolução algébrica.....	59
Figura 39 – Relatório – parte da resolução numérica.....	60
Figura 40 – Influência da tolerância verificada a cada termo nos diagramas.....	62
Figura 41 – Diagrama 1 da Tabela 3 com o atual critério de parada.....	62
Figura 42 – Detalhes do Exemplo 1. ....	64
Figura 43 – Diagramas do deslocamento e $M_{xy}$ do Exemplo 1.....	65
Figura 44 – Diagramas do $M_x$ e $M_y$ do Exemplo 1.....	66
Figura 45 – Diagrama do $Q_x$ e $Q_y$ do Exemplo 1.....	67
Figura 46 – Diagrama do deslocamento gerado no RFEM 5. ....	68
Figura 47 – Dados do exemplo 2. ....	70
Figura 48 – Diagrama do deslocamento e de $M_{xy}$ do Exemplo 2.....	72
Figura 49 – Diagramas do $M_x$ e $M_y$ do Exemplo 2.....	73
Figura 50 – Diagrama da $Q_x$ e $Q_y$ do Exemplo 2.....	74
Figura 51 – Diagrama do momento em x e y do exemplo 2, gerado no RFEM 5.....	75
Figura 52 – Dados do Exemplo 3.....	76
Figura 53 – Diagramas do deslocamento e $M_{xy}$ do Exemplo 3.....	77
Figura 54 – Diagramas do $M_x$ e $M_y$ do Exemplo 3.....	78
Figura 55 – Diagrama do $Q_x$ e $Q_y$ do Exemplo 3.....	79
Figura 56 – Diagrama do deslocamento gerado no RFEM 5. ....	80
Figura 57 – Código que gera a tabela dos dados dos apoios do relatório. ....	86
Figura 58 – Código que gera a tabela dos dados das cargas pontuais.....	87
Figura 59 – Código que gera a tabela resumo do relatório. ....	88
Figura 60 – Relatório detalhado do Exemplo 1 descrito no item 4.5. ....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – <i>Tags</i> e suas funcionalidades. ....	35
Tabela 2 – Exemplo para análise do critério de parada. ....	61
Tabela 3 – Informações dos diagramas contidos na Figura 40. ....	61
Tabela 4 – Convergência nas funções de carga sobre região e pontual. ....	63
Tabela 5 – Comparações Navier e Marcus, $\nu$ adotado como 0. ....	68
Tabela 6 – Comparações do módulo (Navier) com RFEM 5 (MEF), $\nu = 0,3$ . ....	68
Tabela 7 – Convergência das funções de Navier. ....	69
Tabela 8 – Comparação dos valores máximos entre Navier e T- Rüsck. ....	70
Tabela 9 – Comparação com o RFEM 5 (MEF). ....	71
Tabela 10 – Comparações do módulo (Navier) com RFEM 5 (MEF) ; $m, n = 50$ . ....	80
Tabela 11 – Comparações do módulo (Navier) com RFEM 5 (MEF); $m, n = 75$ . ....	81
Tabela 12 – Análise comparativa entre o módulo e RFEM em outro ponto. ....	81

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BIM	<i>Building Information Modeling</i> (Modelagem da Informação da Construção)
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
HTML	<i>HyperText Markup Language</i> (Linguagem de Marcação de Hipertexto)
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
MEF	Método dos elementos finitos
NEV	Núcleo de Engenharia Virtual
NEVE	Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental
PDF	<i>Portable Document Format</i> (Formato Portátil de Documento)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$u, v, w$	Deslocamento pontuais nas direções x, y e z
$a$	Dimensão da laje na direção do eixo x
$b$	Dimensão da laje na direção do eixo y
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$D$	Rigidez da placa
$t$	Espessura da placa
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$M_x$	Momento fletor na direção x
$M_y$	Momento fletor na direção y
$M_{xy}$	Momento torsor
$Q_x$	Cortante na direção x
$Q_y$	Cortante na direção y
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Deformação nas direções x, y e z, respectivamente
$dx, dy, dz$	Dimensões infinitesimais nas direções x, y e z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Ângulos de distorções da placa
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensão normal nas direções x, y e z, respectivamente
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{xy}$	Tensões tangenciais
$p(x, y)$	Função de uma carga qualquer sobre a laje
$q_0$	Carga distribuída uniformemente
$p_{mn}$	Coefficiente de carga
$e$	Espessura do pavimento
$te'$	Dimensão de quadrado de área equivalente da carga móvel do TB450
$te$	Dimensão da projeção da carga móvel do TB450 até o centro da laje

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>OBJETIVOS .....</b>	<b>16</b>
<b>1.2</b>	<b>JUSTIFICATIVA.....</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>18</b>
<b>2.1</b>	<b>TEORIA DE KIRCHHOFF APLICADA ÀS LAJES .....</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>RELAÇÕES DA TEORIA DA ELASTICIDADE .....</b>	<b>20</b>
<b>2.2.1</b>	<b>Deslocamentos .....</b>	<b>20</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Deformações.....</b>	<b>22</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Tensões.....</b>	<b>24</b>
<b>2.2.4</b>	<b>Esforços .....</b>	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>EQUAÇÃO DE LAGRANGE.....</b>	<b>28</b>
<b>2.3</b>	<b>MÉTODO DE NAVIER .....</b>	<b>29</b>
<b>2.4</b>	<b>FERRAMENTAS USADAS PARA CRIAÇÃO DE SOFTWARES WEB ....</b>	<b>34</b>
<b>2.4.1</b>	<b>HTML .....</b>	<b>34</b>
<b>2.4.1.1</b>	<b>Canvas .....</b>	<b>35</b>
<b>2.4.2</b>	<b>JavaScript .....</b>	<b>36</b>
<b>2.4.2.1</b>	<b>PDFMake.....</b>	<b>37</b>
<b>2.4.2.2</b>	<b>SweetAlert2 .....</b>	<b>38</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Visual Studio Code.....</b>	<b>38</b>
<b>2.5</b>	<b>SOFTWARES PARA CÁLCULOS DE LAJES .....</b>	<b>39</b>
<b>2.5.1</b>	<b>Robot Structural Analysis Professional .....</b>	<b>39</b>
<b>2.5.2</b>	<b>RFEM 5 .....</b>	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>46</b>
<b>4.1</b>	<b>FUNÇÕES ALGÉBRICAS EXPLICITADAS .....</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>FLUXOGRAMAS GERAIS.....</b>	<b>48</b>
<b>4.3</b>	<b>FUNCIONAMENTO DO MÓDULO DESTE TRABALHO.....</b>	<b>53</b>
<b>4.4</b>	<b>PROCESSO DE VERIFICAÇÃO DO CRITÉRIO DE PARADA .....</b>	<b>60</b>
<b>4.5</b>	<b>EXEMPLOS.....</b>	<b>63</b>
<b>4.5.1</b>	<b>Exemplo 1 – Carga distribuída sobre toda a laje .....</b>	<b>63</b>
<b>4.5.2</b>	<b>Exemplo 2 – Carga distribuída sobre região retangular .....</b>	<b>70</b>
<b>4.5.3</b>	<b>Exemplo 3 – Carga pontual.....</b>	<b>76</b>

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>82</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>83</b>
	<b>APÊNDICE A – PARTE DO CÓDIGO JAVASCRIPT PARA ELABORAÇÃO DO RELATÓRIO .....</b>	<b>86</b>
	<b>APÊNDICE B – RELATÓRIO DO EXEMPLO 1 DO ITEM 4.5.....</b>	<b>89</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico, surge a possibilidade de se utilizar métodos de cálculos matemáticos que antes eram considerados trabalhosos, tendo em vista as suas complexidades e a necessidade de várias interações para se alcançar valores satisfatórios, viáveis agora pelo uso do computador. No âmbito da Engenharia Civil, cita-se a necessidade de cálculos em problemas variados, desde dimensionamentos de estruturas até projetos hidráulicos e elétricos. Entre as estruturas, estão as lajes, elementos bidimensionais utilizados como cobertura ou piso nas edificações.

Nesse âmbito de cálculo, existem inúmeros programas de computador, entretanto, a maioria não apresenta a resolução e o método utilizado, de modo que eles mostram somente os resultados finais ou alguns passos. Dessa forma, o grupo de pesquisa NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental) do IFSP campus Votuporanga, cadastrado no CNPq, tem desenvolvido programas que não só fazem cálculos, mas que exibem o método utilizado na resolução e demonstram todo o procedimento realizado em relatórios gerados no formato PDF que podem auxiliar professores e alunos.

Dentro das propostas do citado grupo de pesquisa, Silva e Nirschl (2020) e Fernandes e Nirschl (2020) criaram um *software* chamado IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), o qual permite desenhar lajes. Tal *software* foi construído com o objetivo de servir como uma base gráfica para que futuros módulos implementassem cálculos para análise estrutural de lajes.

Assim, por meio das linguagens de programação *web* (HTML/*JavaScript*), apresenta-se aqui a criação de um módulo de análise estrutural de lajes pelo método de Navier para o ambiente gráfico IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020).

O trabalho é delimitado em lajes retangulares simplesmente apoiadas sujeitas a três categorias de cargas: distribuída em toda a laje, numa região retangular ou concentrada.

### 1.1 OBJETIVOS

Desenvolver um módulo de programa que calcule deslocamentos e esforços, pela solução de Navier, de lajes retangulares simplesmente apoiadas

nos quatro bordos sujeitas a carga distribuída em toda a laje, distribuída numa região retangular ou concentrada.

Dentre os objetivos específicos, citam-se:

- Implementar computacionalmente as funções, deduzidas pelo método de Navier.
- Criar um algoritmo para a plotagem dos diagramas das funções de deslocamentos e esforços.
- Viabilizar computacionalmente um relatório no formato PDF (*portable document format*), contendo a explicação do método de Navier e os procedimentos de cálculos.
- Disponibilizar o módulo de programa na *web* para que professores, alunos e profissionais possam utilizá-lo como material de estudo e aplicação.

## **1.2 JUSTIFICATIVA**

Com avanço tecnológico, as páginas de *internet* têm sido muito utilizadas para aprender ou se aprofundar em novos conhecimentos. Nesse sentido, o módulo implementado no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), permite a geração de um relatório com os passos de resolução, pelo método de Navier, de lajes simplesmente apoiadas nas quatro extremidades sujeitas a carga distribuída em toda a laje, distribuída em uma região retangular e concentrada (além de suas superposições). Tendo em vista tais funcionalidades, o módulo poderá ser utilizado por alunos como material de estudo, por professores como elemento auxiliador na metodologia de ensino e por profissionais como método prático de análise estrutural.

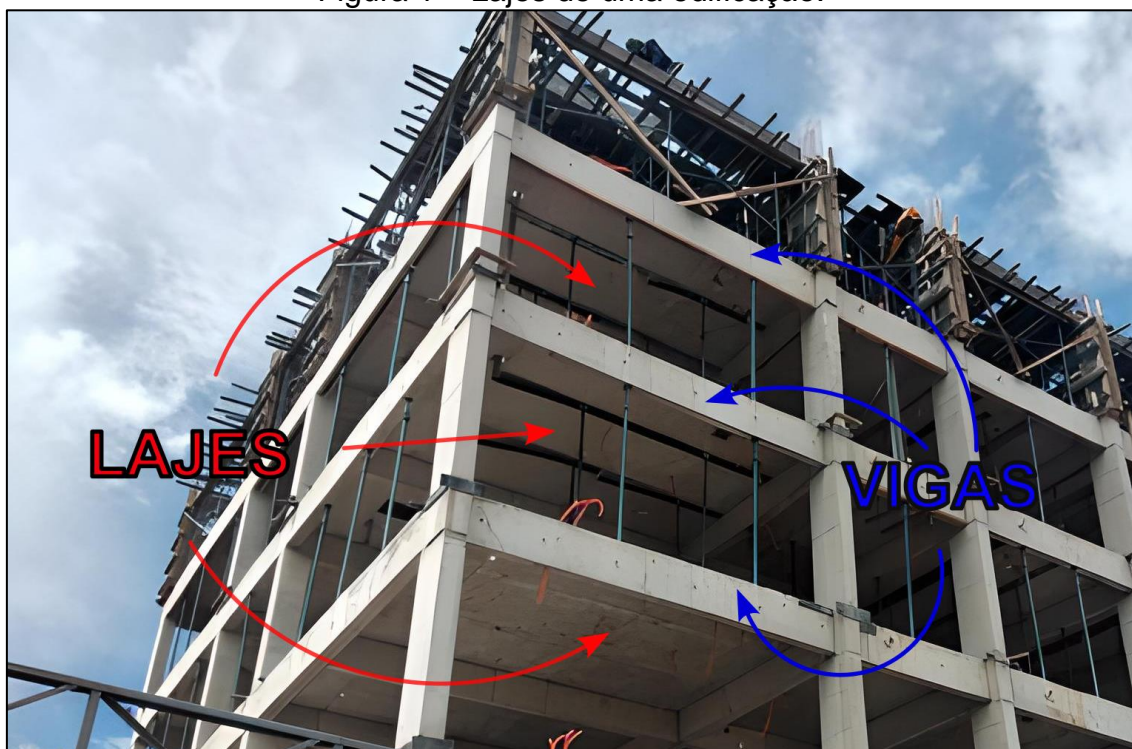
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresenta-se a fundamentação teórica do trabalho, destacando-se conceitos necessários para a sua compreensão. Também são expostos, de forma concisa, outros *softwares* que realizam cálculos de lajes.

### 2.1 TEORIA DE KIRCHHOFF APLICADA ÀS LAJES

Laje é um elemento estrutural de cobertura ou piso de uma edificação (ver Figura 1), destinada a suportar cargas verticais (normais ao seu plano) que são transmitidas por meio de seus apoios. Alguns exemplos de cargas que as lajes de coberturas podem estar sujeitas são: o peso do telhado, da caixa d'água e da casa de máquina do elevador (CAMACHO, 2004).

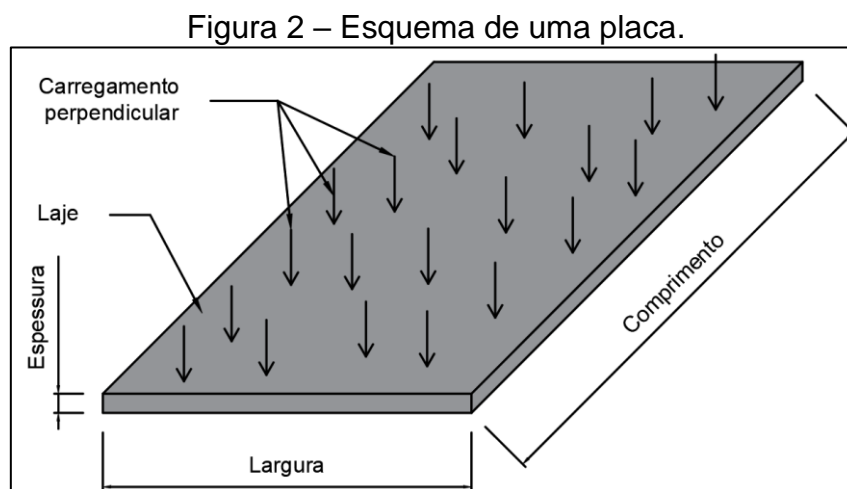
Figura 1 – Lajes de uma edificação.



Fonte: Adaptado de Habitissimo (20??).

Observa-se (Figura 1) que a laje tem duas dimensões (comprimento e largura) muito maiores do que a terceira (espessura), por isso é considerada como elemento bidimensional. Ela também pode ser chamada de placa por

receber cargas perpendiculares ao plano (sejam distribuídas, pontuais, lineares etc.), resultando na flexão, conforme a Figura 2 (BASTOS, 2021).



Fonte: O próprio autor (2022).

Uma laje pode ter vários tipos de apoio, entre eles apoios fixos em suas quatro extremidades, como as vigas de borda que aparecem na Figura 1.

De acordo com Szilard (2004), é difícil matematicamente encontrar soluções exatas rigorosas para lajes sujeitas a carga perpendiculares ao seu plano, uma vez que seria necessária a resolução de equações diferenciais elásticas tridimensionais. Entretanto, Szilard (2004) ressalta que a Teoria de Kirchhoff apresenta bons resultados, na maior parte dos casos, sem a necessidade de completa análise tridimensional. Para isso, a Teoria de Kirchhoff estabelece algumas hipóteses:

- Material da placa é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke (material elástico-linear);
- Os deslocamentos transversais ( $w$ ) são pequenos comparados com a espessura ( $t$ ) da placa;
- As tensões na direção transversal ( $\sigma_z$ ) são desprezíveis;
- A seção plana e perpendicular à superfície média, permanece plana e perpendicular à superfície média após a flexão;
- A dimensão da espessura é pequena comparada com as outras dimensões (placa delgada).

Ventsel e Krauthammer (2001) explicam que, para a placa ser classificada como delgada, é necessário que a relação  $b/t$  (menor dimensão da placa sobre

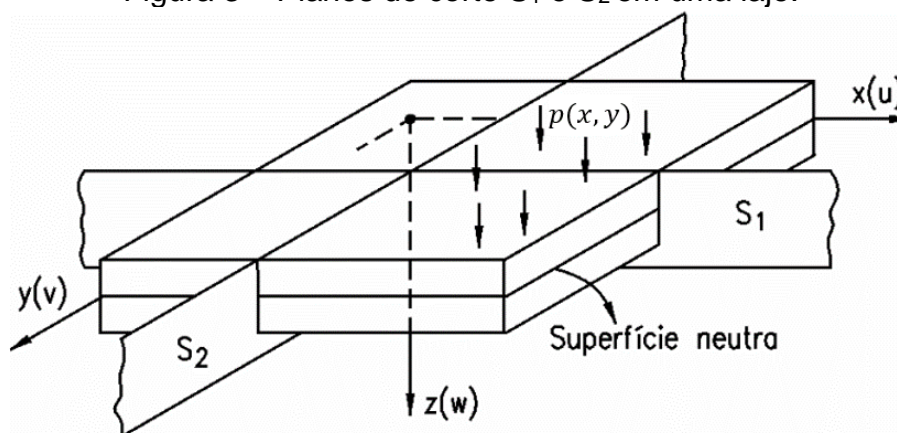
espessura) esteja no intervalo de 10 a 80. Tal grupo de placas finas pode ainda ser separado de acordo com a relação  $w/t$  (deslocamento da placa sobre espessura):

- Se  $\frac{w}{t} \leq 0,2$  é chamada de placa fina rígida, de modo que as deformações no plano médio podem ser desprezadas;
- Se  $\frac{w}{t} \geq 0,3$  é chamada de placa flexível, onde as deflexões laterais e as deformações no plano médio devem ser consideradas.

## 2.2 RELAÇÕES DA TEORIA DA ELASTICIDADE

Com as hipóteses de Kirchhoff, é possível determinar as relações fundamentais da teoria da elasticidade aplicada às placas delgadas. Considera-se, de início, uma laje sujeita a uma carga normal qualquer  $p(x, y)$  com dois planos de corte  $S_1$  e  $S_2$  (Figura 3).

Figura 3 – Planos de corte  $S_1$  e  $S_2$  em uma laje.

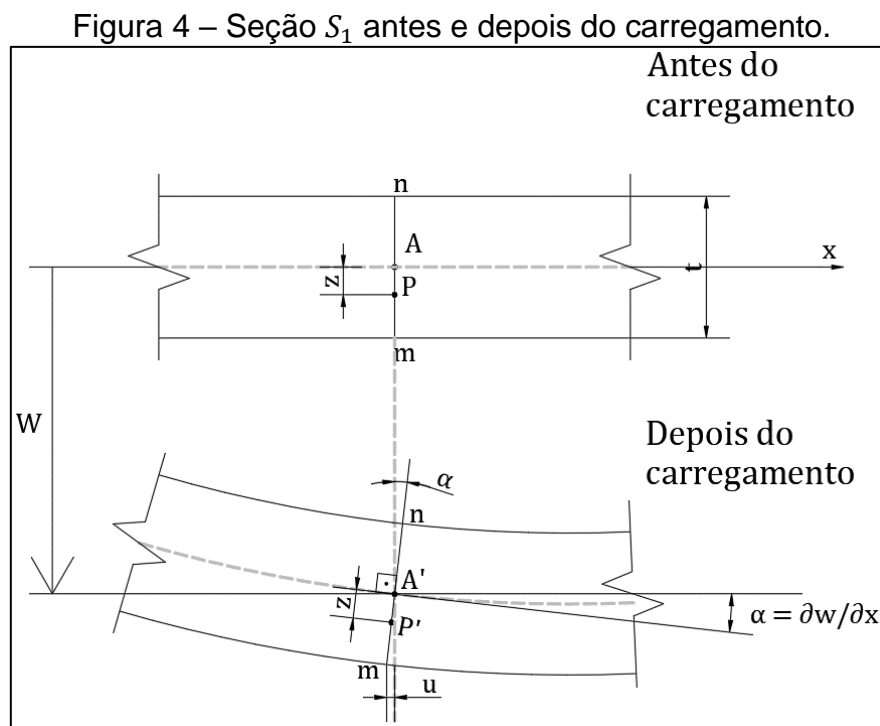


Fonte: Adaptado de Soares (2004).

A partir destes cortes, serão deduzidas equações para a determinação dos deslocamentos, deformações, tensões e esforços na laje, utilizados para seu dimensionamento estrutural. O equacionamento geral é apresentado, por exemplo, em Dias (2019), e está descrito nos itens a seguir, complementados com outras bibliografias.

### 2.2.1 Deslocamentos

Pela Figura 4, a qual representa o corte  $S_1$  da Figura 3, é possível notar que uma seção qualquer  $m-n$ , após o carregamento, continua ortogonal ao plano médio (neutro), conforme a hipótese de Kirchhoff. Além disso,  $m-n$  sofre rotação e, por consequência, um ponto qualquer  $P$  disposto sobre ela a uma distância  $z$  do plano médio sofre um deslocamento  $u$  no sentido oposto do eixo  $x$  (o que o transforma no ponto  $P'$ ).



Fonte: Adaptado de Soares (2004).

É possível notar, na Figura 4, que a rotação  $\alpha$  sofrida pela seção  $m-n$  é igual a  $\frac{\partial w}{\partial x}$ . Sendo a tangente do ângulo  $\alpha$  escrita conforme (1).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-u}{z} \quad (1)$$

Para ângulos muito pequenos, pode-se admitir a igualdade (2) (hipótese de Kirchhoff de pequenos deslocamentos).

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \alpha \quad (2)$$

Com isso, chega-se a (3).

$$-\frac{u}{z} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

Por fim, tem-se que o deslocamento  $u$  (4).

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

Por analogia, por meio do corte  $S_2$ , conquista-se o deslocamento na direção de  $y$  (5).

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5)$$

### 2.2.2 Deformações

Sabendo que a deformação é a relação entre o alongamento ( $u, v$ ) e o comprimento inicial, têm-se as relações infinitesimais da deformação linear na direção  $x$  (6) e na direção  $y$  (7).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7)$$

Substituindo (4) e (5) em (6) e (7), respectivamente, são obtidas as relações infinitesimais das deformações (8) e (9) em relação ao  $w$  (deslocamento transversal).

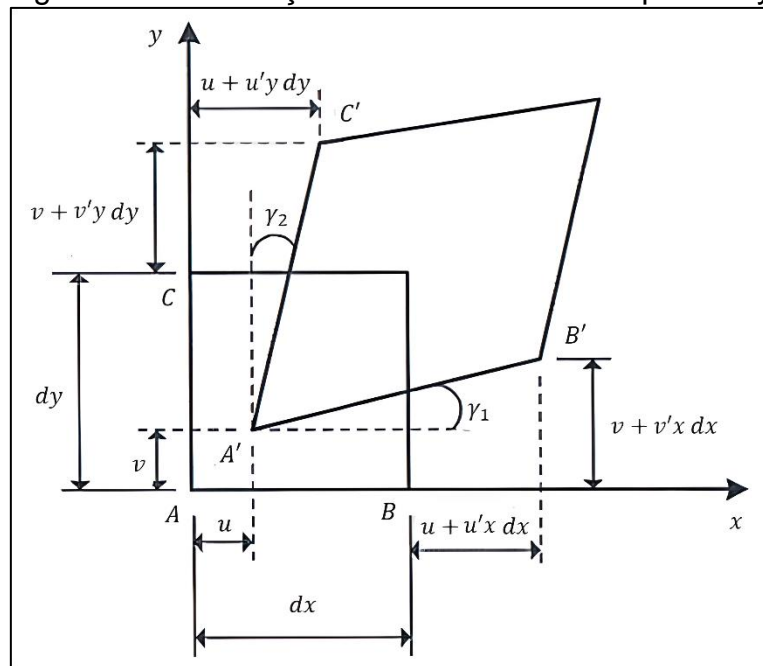
$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \quad (8)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \quad (9)$$

A deformação por corte ( $\gamma_{xy}$ ), também chamada de ângulo de distorção na seção da placa, é advinda das tensões tangenciais (ver Figura 6). Com isso,

na Figura 5, observa-se que a projeção (x-y) de um elemento infinitesimal de placa (Figura 6), tem suas faces rotacionadas devido às tensões tangenciais. Assim, nota-se que a face  $AB$  sofre uma rotação  $\gamma_1$ , transformando-a em  $A'B'$ . Por analogia, a face  $AC$  sofre uma rotação  $\gamma_2$ , transformando-a em  $A'C'$  (ARAÚJO, 2010).

Figura 5 – Deformações de um elemento no plano x-y.



Fonte: Adaptado de Araújo (2010)

O comprimento da projeção em  $x$  ( $dx'$ ) de  $A'B'$ , é obtido por (10).

$$dx' = (1 + u'x) dx \quad (10)$$

Com isso, consegue-se outra equação para deformação linear na direção  $x$  (11).

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} \quad (11)$$

Substituindo (6) e (10) em (11), consegue-se  $u'x$  (12).

$$u'x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

Por analogia  $v'x$  e  $u'y$  são, respectivamente, (13) e (14).



$$v'x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13)$$

$$u'y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (14)$$

De acordo com Araújo (2010), a deformação por corte  $\gamma_{xy}$  será igual a distorção do elemento (15).

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = v'x + u'y \quad (15)$$

Com a substituição de (13) e (14) em (15), tem-se (16).

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

Aplicando (4) e (5) em (16) chega-se à (17).

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} \quad (17)$$

Como a hipótese de Kirchhoff cita que  $\sigma_z = 0$ , não há deformações verticais, como observado em (18) e (19) e (20).

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (19)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

### 2.2.3 Tensões

A Lei de Hooke mostrada, por exemplo, em Soares (2004), define as relações entre deformações e tensões aqui necessárias pelas equações (21), (22) e (23).

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (21)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (22)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \cdot (1 - \nu) \gamma_{xy} \quad (23)$$

Sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal (24) e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material da laje.

$$G = \frac{E}{2(1 - \nu)} \quad (24)$$

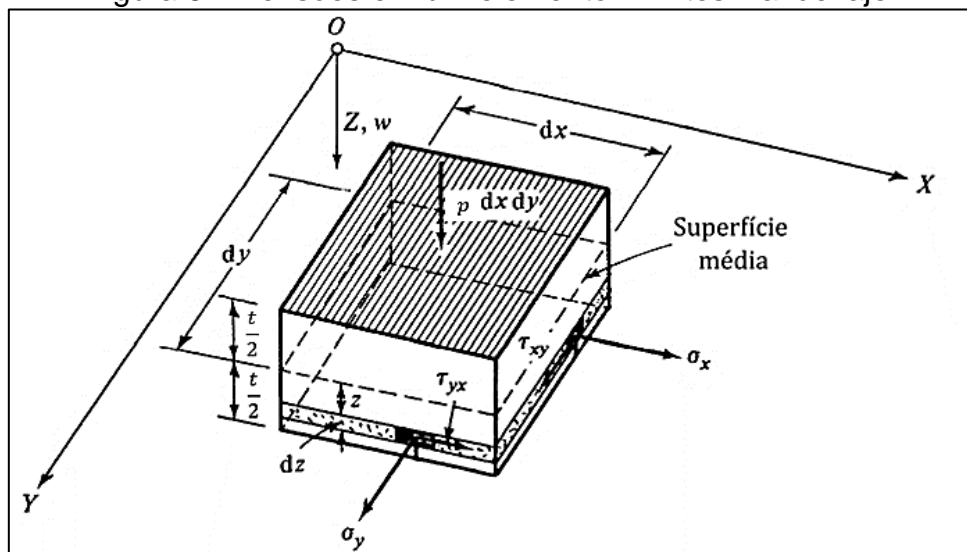
Substituindo as deformações (8), (9) e (17) em (21), (22) e (23), chegamos às tensões normais (25), (26) e tangencial (27) em função do deslocamento transversal.

$$\sigma_x = -\frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \cdot \left[ \frac{\partial w^2}{\partial^2 x} + \nu \left( \frac{\partial w^2}{\partial^2 y} \right) \right] \quad (25)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \left[ \nu \left( -z \frac{\partial w^2}{\partial^2 x} \right) - z \frac{\partial w^2}{\partial^2 y} \right] \quad (26)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E \cdot z}{(1 + \nu)} \cdot \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} \quad (27)$$

Figura 6 – Tensões em um elemento infinitesimal de laje.



Fonte: Adaptado de Szilard (2004).

## 2.2.4 Esforços

Szilard (2004) explica que as componentes das tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são associadas a momentos fletores ao longo da espessura da placa, de modo se faz a integração desses componentes multiplicados pelo braço de alavanca na direção x (28) e na direção y (29).

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (28)$$

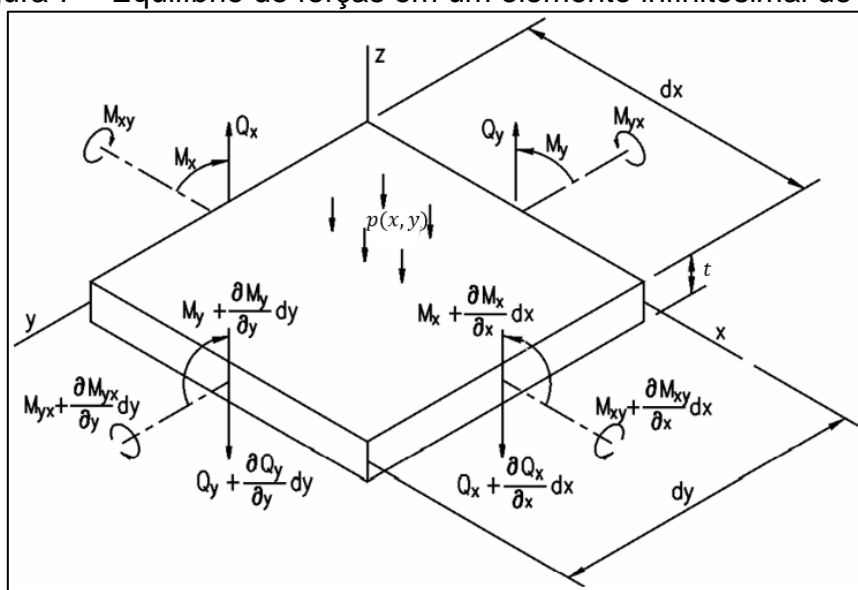
$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \quad (29)$$

De acordo com Szilard (2004), analogamente se calculam os momentos torsores pela integração de  $\tau_{xy}$ , (27), e  $\tau_{yx}$ . Como  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  chega-se a (30).

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (30)$$

Os esforços cortantes podem ser encontrados pelo equilíbrio de esforços em um elemento infinitesimal de placa (Figura 7).

Figura 7 – Equilíbrio de forças em um elemento infinitesimal de laje.



Fonte: Adaptado de Soares (2004).

Fazendo o equilíbrio das forças verticais  $\sum F_y = 0$ , tem-se (31). Convém lembrar que o sentido positivo do eixo z foi adotado para baixo, dessa forma, as cargas que têm esse sentido também serão positivas.

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) \cdot dy - Q_x \cdot dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial x} dy\right) \cdot dx - Q_y \cdot dx + p(x, y) dx dy = 0 \quad (31)$$

Após simplificação matemática, consegue-se (32).

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} + p(x, y) = 0 \quad (32)$$

Analogicamente, Dias (2019) mostra que o equilíbrio de momentos em torno do eixo y,  $\sum M_y = 0$ , pode ser simplificado a (33), bem como o equilíbrio de momentos em torno do eixo x,  $\sum M_x = 0$ , leva a (34).

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (33)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (34)$$

Desse modo, com as Teorias da Elasticidade e de Kirchhoff, conquista-se por meio de (28), (29) e (30), respectivamente, os momentos fletores na direção x (35), na direção y (36) e o momento torsor (37). Com a substituição de (35), (36) e (37) em (33) e (34), conseguem-se as forças de cisalhamento transversais (38) e (39) (SZILARD, 2004).

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (35)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (36)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (37)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (38)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (39)$$

Em que  $D$  é a rigidez à flexão da placa, descrita em (40).

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (40)$$

Dessa maneira, percebe-se que, com a função do deslocamento, é possível obter as funções dos esforços internos necessárias diretamente no dimensionamento estrutural das lajes.

Para se explicitar a função deslocamento, pode-se recorrer à resolução da equação de Lagrange, deduzida a seguir.

## 2.2 EQUAÇÃO DE LAGRANGE

A partir de (32), advinda do equilíbrio de esforços de um elemento infinitesimal de placa (Figura 7), se desenvolve a Equação de Lagrange. Dessa forma, se faz necessário encontrar  $\frac{\partial Q_x}{\partial x}$  (derivada de  $Q_x$  em relação a  $x$ ) e  $\frac{\partial Q_y}{\partial y}$  (derivada de  $Q_y$  em relação a  $y$ ).

Derivando  $Q_x$  (38) em relação a  $x$ , chega-se a (41).

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right] = -D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \quad (41)$$

Derivando  $Q_y$  (38) em relação a  $y$ , chega-se a (42).

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right] = -D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \quad (42)$$

Aplicando (41) e (42) em (32), chega à (43).

$$-D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + p(x, y) = 0 \quad (43)$$

Reagrupando, obtêm-se, finalmente, a equação diferencial da placa (Equação de Lagrange) (44).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (44)$$

A Equação de Lagrange é uma equação diferencial que, segundo Dias (2019, p. 11): “descreve o comportamento físico de uma placa”, desde que se tenham as condições de contorno pré-estabelecidas.

### 2.3 MÉTODO DE NAVIER

O Método de Navier se trata de uma solução analítica para a Equação de Lagrange e, portanto, para a obtenção da equação dos deslocamentos transversais ( $w$ ) da laje. Tal método, também chamado de solução forçada, transforma a equação diferencial em uma equação algébrica de modo a facilitar o processo de solução.

Para obter uma solução da Equação de Lagrange, (44), é necessário definir as condições de contorno, que no caso de uma laje simplesmente apoiada são dadas em (45) (deslocamentos e momentos fletores nulos nas extremidades).

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0 & M_x(0, y) &= 0 \\ w(x, 0) &= 0 & M_x(a, y) &= 0 \\ w(a, y) &= 0 & M_y(x, 0) &= 0 \\ w(x, b) &= 0 & M_y(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Navier, em 1820, apresenta a equação (46), conforme Timoshenko (1953, p. 121), como possível solução para a deflexão de placas retangulares simplesmente apoiadas nos bordos e, similarmente, a equação (47) para a função de uma carga genérica sobre a laje.

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (46)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (47)$$

Nota-se que as funções (46) e (47) são séries duplas trigonométricas e obedecem às condições de contorno, de modo que os senos são nulos quando  $x$  ou  $y$  assumem o valor 0 ou, respectivamente, o valor  $a$  (dimensão da laje paralela a  $x$ ) e o valor  $b$  (dimensão da laje paralela a  $y$ ) (SZILARD, 2004).

Substituindo (46) e (47) na Equação de Lagrange, (44), consegue-se (48).

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (48)$$

Desse modo, substituindo (48) em (46), obtemos a função de deslocamento transversal genérica para lajes retangulares simplesmente apoiadas, (49).

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (49)$$

Onde  $p_{mn}$  é, conforme Szilard (2004), um coeficiente de expansão da carga em série dupla de Fourier, dado por (50).

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (50)$$

A fim de se obter a função do deslocamento de uma laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente sobre toda laje, Szilard (2004), determina, para o caso de carga uniformemente distribuída sobre toda a laje, a expansão da carga em série dupla de Fourier e chega à equação (51).

$$p_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (51)$$

Com a substituição de (51) em (49), chega-se na função do deslocamento transversal de uma placa simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente sobre toda laje (52).

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (52)$$

Conforme Szilard (2004), para a função do deslocamento (52) e dos esforços (60), (61), (62), (63) e (64), devido a uma carga uniformemente distribuída sobre toda a laje, tem-se que a variação de  $m, n = 1, 3, 5, \dots \infty$ .

Para uma carga uniformemente distribuída  $q_0$  sobre uma região retangular de dimensões de  $2c \cdot 2d$  na planta da laje, com seu centro na posição  $x_1, y_1$  (vide Figura 8), Soares (2004) apresenta o coeficiente de carga  $p_{mn}$  (53), o qual foi utilizado no intuito de desenvolver a função do deslocamento (65), apresentada no item RESULTADOS.

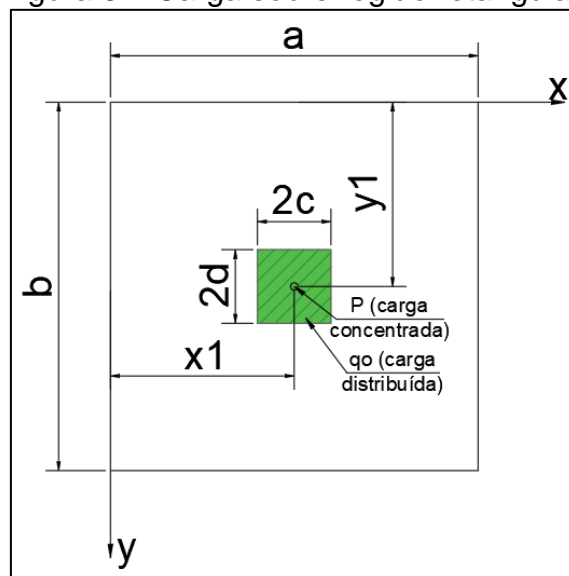
$$p_{mn} = \frac{4P}{a \cdot b} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\frac{m\pi c}{a} \frac{n\pi d}{b}} \quad (53)$$

Sendo  $P$  uma carga pontual resultante da carga distribuída sobre região retangular, escrita como (54).

$$P = 4q_0 \cdot c \cdot d \quad (54)$$



Figura 8 – Carga sobre região retangular.

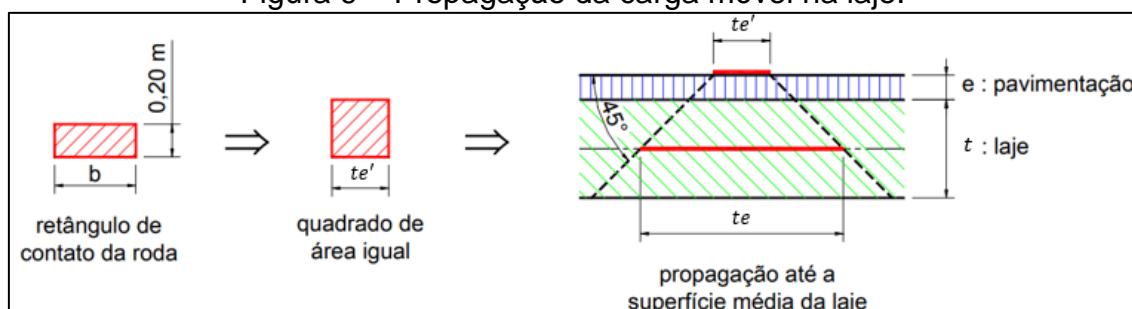


Fonte: O próprio autor (2022).

Será também considerado neste trabalho uma superposição de ações dada pelo trem-tipo TB450 da NBR 7188 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013), um conjunto de cargas móveis distribuídas sobre regiões retangulares que simula o tráfego de veículos de modo que a projeção dessas na laje pode ser visualizada na Figura 10.

A projeção da carga móvel de uma roda na laje é dada por um quadrado de aresta “ $te$ ”. A partir do item 5.1 da NBR 7188 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013), “ $te$ ” é obtido conforme a Figura 9.

Figura 9 – Propagação da carga móvel na laje.



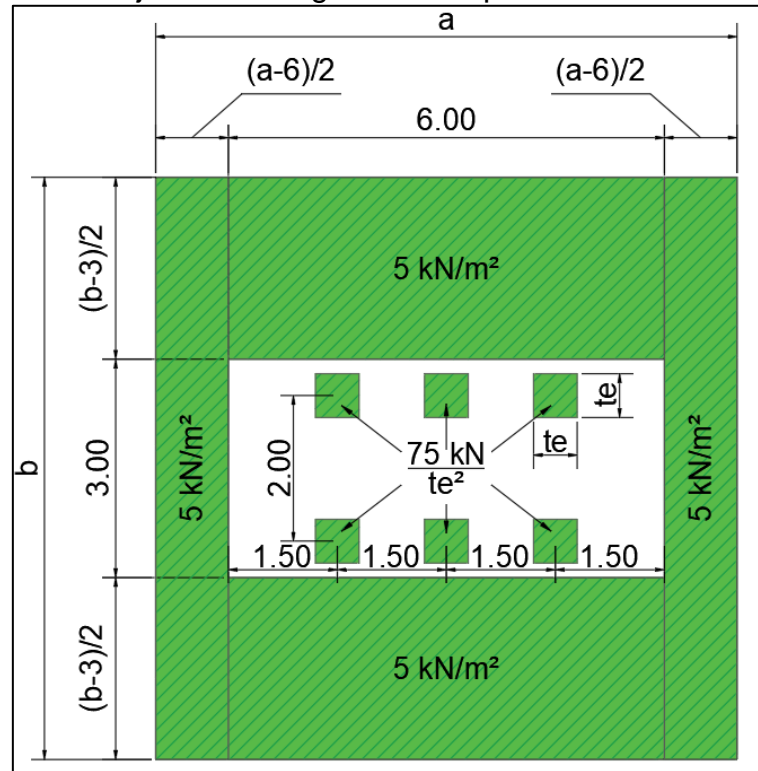
Fonte: Adaptado da NBR 7188 (ABNT, 2013).

Em relação à Figura 9, para classe TB-450 a NBR 7188 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013) informa que  $b = 0,50 \text{ m}$ . Com isso, geometricamente (ver Figura 9), pode-se determinar as dimensões  $te'$  (55) e  $te$  (56).

$$te' = \sqrt{0,2 \cdot 0,5} = 0,316 \text{ m} \quad (55)$$

$$te = te' + 2 \cdot \left( e + \frac{t}{2} \right) = 0,316 + 2 \cdot \left( e + \frac{t}{2} \right) \quad (56)$$

Figura 10 – Conjunto de Cargas Trem-Tipo TB450. Cotas em metro.



Fonte: Adaptado da NBR 7188 (ABNT, 2013).

Dessa forma para uma carga pontual  $P$  (54), o seu  $p_{mn}$  pode ser desenvolvido tendendo a zero as dimensões  $c$  e  $d$  presentes (53), conforme (57).

$$\lim_{c \rightarrow 0} \lim_{d \rightarrow 0} \left( \frac{4P \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi c}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi d}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{a \cdot b \frac{m\pi c}{a} \frac{n\pi d}{b}} \right) \quad (57)$$

Resolvendo (57), tem-se o  $p_{mn}$  para uma carga pontual (58).

$$p_{mn} = \frac{4P}{a \cdot b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \quad (58)$$

Substituindo (58) em (49), chega-se ao deslocamento transversal da laje devido a uma carga pontual (59).

$$w(x, y) = \frac{4P}{\pi^4 Dab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (59)$$

Conforme Szilard (2004), para a função do deslocamento devido uma carga pontual (59) e dos esforços internos (71), (72), (73), (74) e (75), tem-se que,  $m$  e  $n$  varia em números inteiros (1,2,3...∞).

## 2.4 FERRAMENTAS USADAS PARA CRIAÇÃO DE SOFTWARES WEB

Nesse item serão abordadas algumas ferramentas usadas para criação de um *software web*, um dos objetivos deste trabalhos.

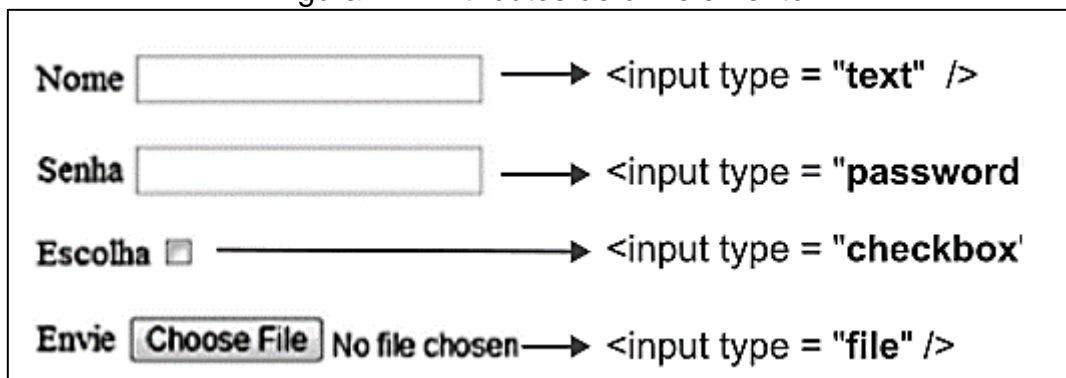
### 2.4.1 HTML

Segundo Flatschart (2011), o HTML (*Hyper Text Markup Language*) trata-se de uma linguagem de marcação e é uma das linguagens amplamente utilizadas na *web*, responsável pela criação de elementos usados para estruturar um *website*.

Segurado (2017) afirma que o HTML não necessita de um codificador, como linguagens de programação, sendo somente necessário um *browser* (navegador) para gerar o conteúdo do código, desde que este esteja contido em arquivo com extensão “.html”. Além do mais, para o navegador identificar os elementos, é necessário distingui-los por meio de *tags*. Com isso, um elemento é definido quando acompanhado de “<>” no seu início e “</>” no final. Por exemplo, para criação do elemento *input*, deve-se escrever a seguinte *tag*: <input></input>.

Existem diversos tipos de *tag* já predefinidas, as quais têm seus respectivos atributos que darão a funcionalidade ao elemento. Por meio da Figura 11, pode-se visualizar quatro elementos *input* com funcionalidades distintas, devido aos seus atributos *type*.

Figura 11 – Atributos de um elemento.



Fonte: Adaptado de Flatschart (2011).

Lemay (2002, p. 61) classifica algumas das *tags* por suas funcionalidades, como visto na Tabela 1.

Tabela 1 – *Tags* e suas funcionalidades.

Funcionalidade	Tags
Estrutura geral da página	<code>&lt;html&gt;</code> , <code>&lt;head&gt;</code> e <code>&lt;body&gt;</code>
Títulos, cabeçalhos e parágrafos	<code>&lt;title&gt;</code> , <code>&lt;h1&gt;</code> , <code>&lt;a&gt;</code> , <code>&lt;h6&gt;</code>
Comentários	<code>&lt;!...&gt;</code>
Listas	<code>&lt;ol&gt;</code> , <code>&lt;ul&gt;</code> , <code>&lt;li&gt;</code> , <code>&lt;dt&gt;</code> e <code>&lt;dd&gt;</code>

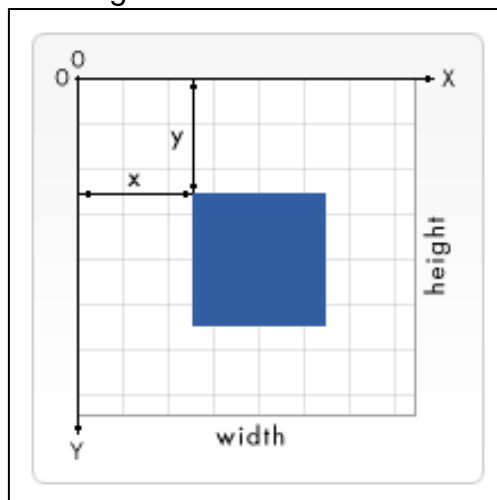
Fonte: Adaptado de Lemay (2002, p. 61).

### 2.4.1.1 Canvas

Segundo Sousa (2018), o *canvas* foi criado pela Apple em 2004 especificamente para o navegador Safari, com o foco de trazer inovações gráficas para *web*. Além disso, o *canvas* é um elemento HTML definido pela tag `<canvas></canvas>`, cuja sua funcionalidade é ser uma tela gráfica.

O mesmo autor ainda explica que, quando se usa tal *tag*, apenas se obtém um retângulo de cor sólida, uma vez que, o controle do desenho é feito pela linguagem *JavaScript*, a qual permite o acesso à códigos já sintetizados para criação de objetos na tela gráfica.

De acordo com Sousa (2018), a *tag* do elemento *canvas* admite os atributos *width* e *height*, os quais respectivamente se referem a largura e altura que o elemento assumirá em *pixels* na tela. MDN Web docs (MOZILLA, 2022) completa que o *canvas* trabalha com um plano cartesiano onde a origem é no canto superior esquerdo do elemento e a unidade é *pixel*, conforme observado na Figura 12.

Figura 12 – Origem dos eixos do elemento *canvas*.

Fonte: MDN Web docs (MOZILLA, 2022).

### 2.4.2 JavaScript

Conforme Segurado (2017), *JavaScript* é uma das linguagens de programações mais utilizadas do momento, sendo a mais importante para o desenvolvimento *web*. Segurado (2004, p.79) ainda destaca que *JavaScript* “é considerada uma linguagem de alto nível, dinâmica e conveniente para estilos de programação orientados a objetos”.

Flatschart (2011) completa pontuando que essa linguagem, quando integrada ao HTML, permite uma maior interação com usuário: além do mais, a linguagem é considerada como *cliente side* (do lado do cliente) onde todo o seu funcionamento acontece pela máquina local do usuário e não depende do servidor onde o *site* está hospedado.

No que se refere-se a léxica e sintaxe do *JavaScript*, Segurado (2017) mostra a semelhança com outras linguagens, uma vez que as funções em código *JavaScript* devem ser delimitadas por “{ }”, as instruções por “;” e existem palavras reservadas, ou seja, não se pode usá-las para criar novas variáveis ou funções. Com isso, Segurado (2017) exhibe em um quadro todas as palavras reservadas, conforme Figura 13.

Figura 13 – Palavras reservadas em um código *JavaScript*.

Break	delete	function	return	typeof
Case	do	if	switch	var
Catch	else	in	this	void
Continue	false	instanceof	throw	while
Debugger	finally	new	true	with
Default	for	null	try	

Fonte: Segurado (2016, p. 69).

Em suma, o *JavaScript* é responsável pela interativamente e comportamento dos elementos HTML. Por exemplo, por meio de código *JavaScript*, pode-se criar uma função que definirá a ação de um botão (elemento HTML).

#### 2.4.2.1 *PDFMake*

O *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020) se trata de uma biblioteca *JavaScript* para a elaboração dinâmica de documentos no formato PDF, seja por meio do *cliente-side* (do lado do cliente) ou *server-side* (do lado do servidor). De maneira geral, o processo de criação de um documento por meio do *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020) consiste em montá-lo e posteriormente emití-lo.

Para a montagem o *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020) oferece funções já predefinidas em código *JavaScript* para inserção de textos, imagens, tabelas, cabeçalhos etc. Além disso, há também a possibilidade de alteração de estilos, seja de textos ou de layout de página (tamanho da página, colunas, numeração de páginas).

Uma problemática que pode ser encontrada durante a elaboração do documento é a quebra de página automática, a qual pode separar nomes e fontes de imagens. Para evitar tal problemática, é possível compactar tais elementos dentro de um uma variável chamada *stack* que deve estar dentro de um objeto com o atributo *unbreakable* atribuído como *true*.

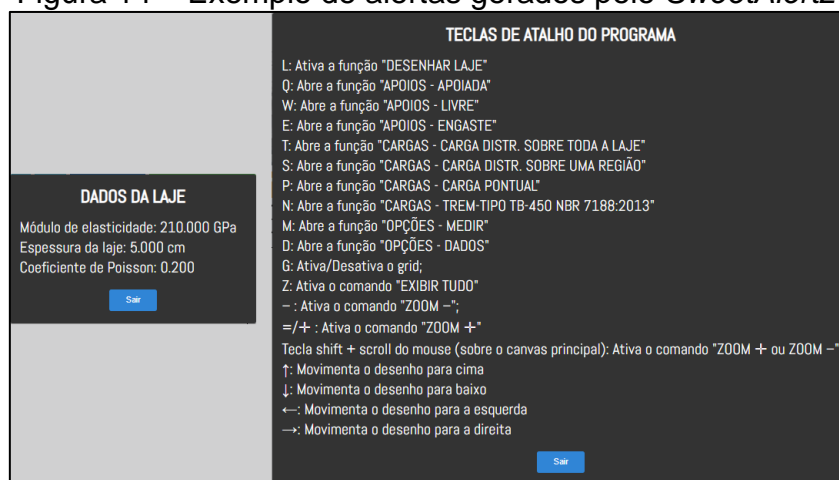
Para emissão, o *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020) possibilita, por meio de funções já predefinidas, a exibição uma nova guia de navegador, o *download* direto ou a impressão do documento.

### 2.4.2.2 SweetAlert2

Para uma melhor interação entre *software* e usuário, é importante a emissão de alertas, desde aqueles que têm objetivo de notificar algo até os utilizados para entrada de dados. A fim de facilitar a emissão desses alertas, há uma biblioteca de *JavaScript* chamada *SweetAlert2* (MONTE, 2022) que faz a emissão de alertas responsivos, ou seja, funcionais em diversos tamanhos de telas (celular, computador, televisão). Sendo assim, o programador não precisa se preocupar com adequação do tamanho de tais alertas em cada formato de tela.

O *SweetAlert2* (MONTE, 2022) permite, por código *JavaScript*, a criação de alertas padronizados e estilizados, salvados em variáveis, de modo que é possível utilizá-los diversas vezes na aplicação, mudando apenas o seu conteúdo. Tal situação pode ser observada na Figura 14.

Figura 14 – Exemplo de alertas gerados pelo *SweetAlert2*.



Fonte: IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020).

### 2.4.3 Visual Studio Code

Para a escrita de algoritmos pode-se utilizar um editor de código, o qual é um editor de texto estilizado e com auto sugestões que auxiliam programadores na escrita de códigos de linguagens de programação, estilo e marcação. Diante dos vários editores de códigos, o Visual Studio Code (MICROSOFT, 2022) se destaca por possibilitar ao programador trabalhar com várias linguagens de programação.

Além disso, como Visual Studio Code (MICROSOFT, 2022) é um *software* de código aberto, seus usuários podem criar extensões a fim de adicionar novas funcionalidades a ele. Tais extensões não só oferecem funcionalidades visuais, mas também as que poupam o tempo do programador, o que torna o Visual Studio Code (MICROSOFT, 2022) um dos editores de código mais utilizado por programadores.

## **2.5 SOFTWARES PARA CÁLCULOS DE LAJES**

Apresentam-se a seguir, para a contextualização do trabalho e posteriormente comparações de resultados, dois *softwares* que fazem a análise estrutural de lajes.

### **2.5.1 Robot Structural Analysis Professional**

O *Robot Structural Analysis Professional* (AUTODESK, 2022) é um *software* proprietário disponibilizado pela Autodesk voltado para a análise estrutural de elementos não necessariamente definidos nele, uma vez que existe uma integração com o Revit (AUTODESK, 2022) garantida a partir do BIM. Dessa maneira, pode-se, em um primeiro momento, fazer todo o projeto estrutural no Revit (AUTODESK, 2022), inclusive a inserção das cargas e combinações, para depois exportá-lo para o *Robot Structural Analysis Professional* (AUTODESK, 2022).

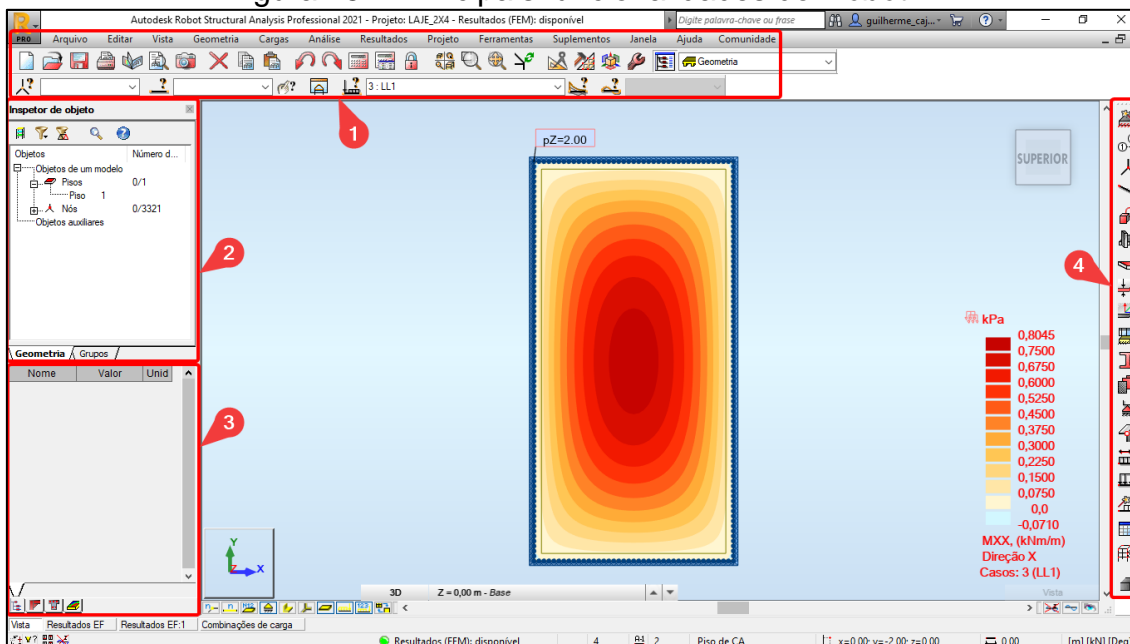
O método de cálculo utilizado pelo *Robot Structural Analysis Professional* (AUTODESK, 2022) é o MEF (Método dos Elementos Finitos). Além disso, o programa permite introduzir efeitos de 2ª ordem, análises lineares e não lineares, dimensionar a malha do MEF (Método dos Elementos Finitos) etc.

Pela Figura 15 nota-se a tela principal do *Robot Structural Analysis Professional* (AUTODESK, 2022) com os resultados de momento na direção x de uma laje e suas principais funcionalidades, numeradas de 1 a 4:

1. A barra do menu;
2. Inspeção de objetos desenhados na tela;
3. Propriedades do objeto selecionado;
4. Menu lateral para inserção de objetos.



Figura 15 – Principais funcionalidades do *Robot*.



Fonte: Adaptado de Robot Structural Analysis Professional (AUTODESK, 2022).

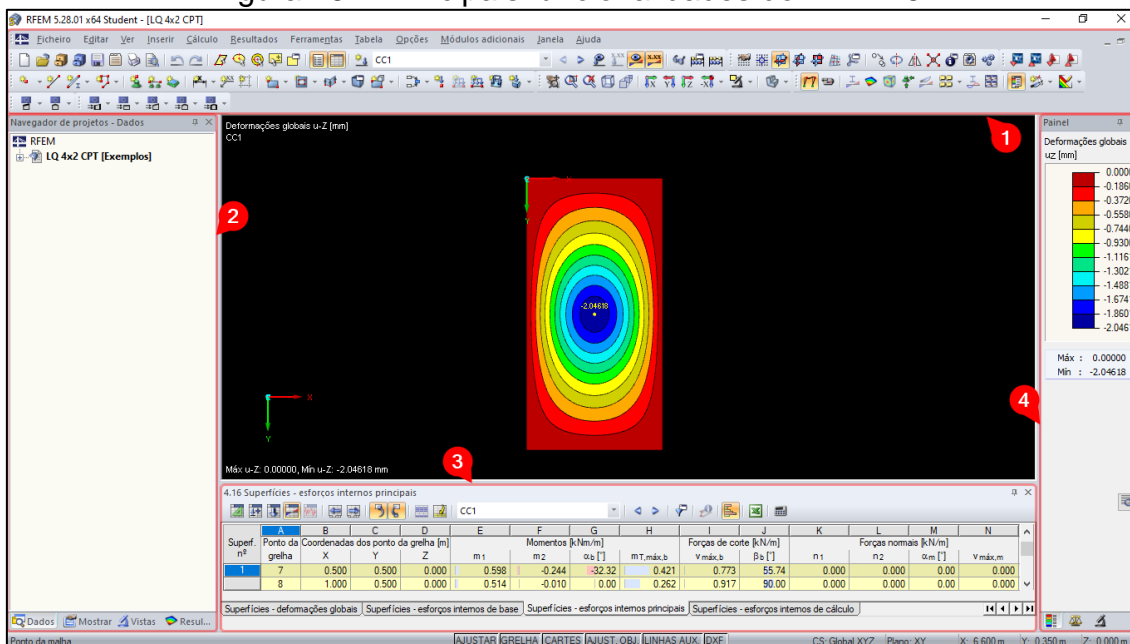
## 2.5.2 RFEM 5

O RFEM 5 (DLUBAL, 2022) é um *software* pago, mas com uma versão estudantil, disponibilizado por uma empresa focada na criação de *softwares* chamada Dlubal. O foco do RFEM 5 (DLUBAL, 2022) fica na análise estrutural de elementos tridimensionais, sendo que o método utilizado nos cálculos de deslocamentos e esforços é o MEF (Métodos dos Elementos Finitos).

A Figura 16 apresenta a tela principal do RFEM 5 (DLUBAL, 2022) com o resultado de deslocamento de uma laje e as principais funcionalidades, numeradas de 1 a 4:

1. Barra de menu;
2. Navegador de projeto, bem como configurações de visualização;
3. Tabela com os dados de entrada e de saída do modelo;
4. Painel lateral com a escala de cores do diagrama.

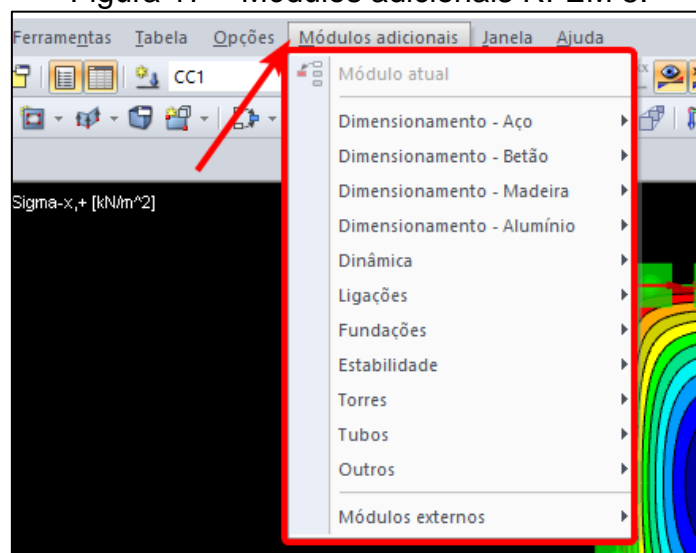
Figura 16 – Principais funcionalidades do RFEM 5.



Fonte: Adaptado de RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

O *software* também oferece módulos adicionais, por exemplo, o dimensionamento de estruturas. Tais módulos podem ser acessados por meio da barra do menu (Figura 17).

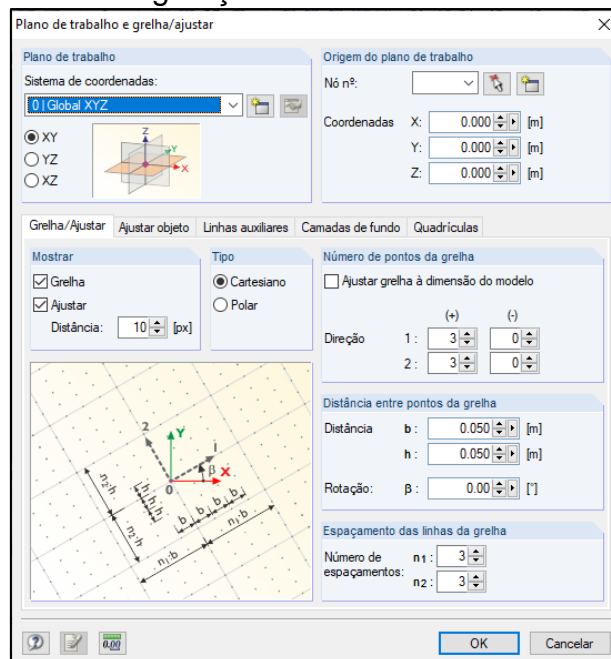
Figura 17 – Módulos adicionais RFEM 5.



Fonte: Adaptado de RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

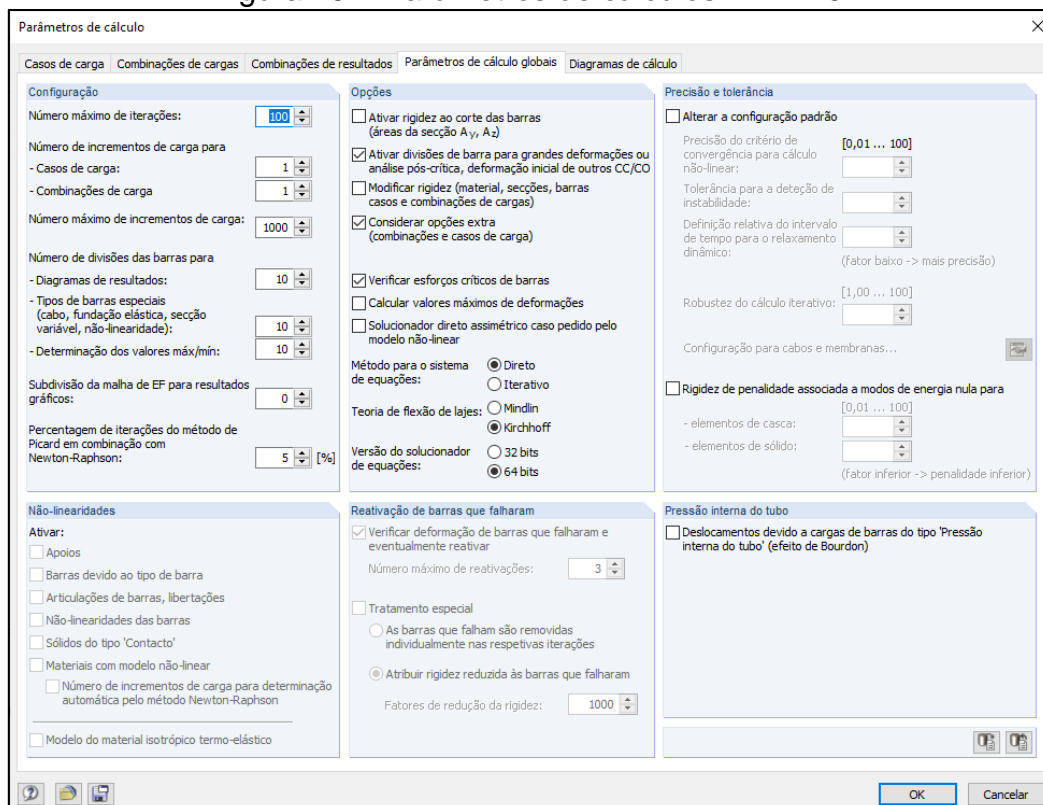
Além disso, o RFEM 5 (DLUBAL, 2022) permite ao usuário determinar a dimensão da malha de elementos finitos conforme a precisão desejada, bem como parâmetros de cálculos como: número de iterações, teoria de flexão das lajes (Figuras 18 e 19).

Figura 18 – Configurações da malha de elementos finitos.



Fonte: RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

Figura 19 – Parâmetros de cálculos RFEM 5.

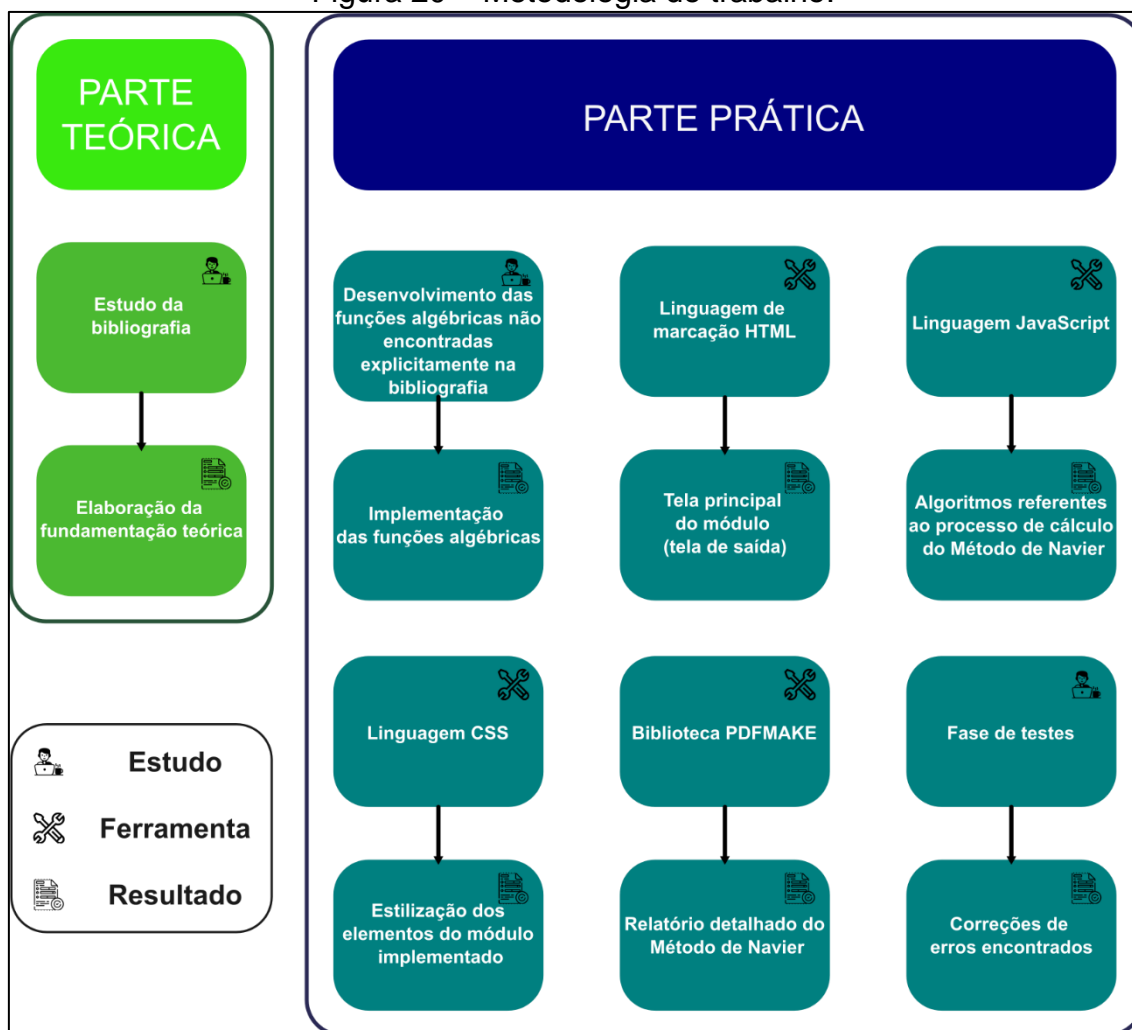


Fonte: RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

### 3 METODOLOGIA

Na Figura 20, apresenta-se a metodologia geral, a qual será explicada detalhadamente a seguir, para a elaboração do trabalho aqui apresentado.

Figura 20 – Metodologia do trabalho.



Fonte: O próprio autor (2022).

Na Figura 21 pode ser observado o IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), o ambiente gráfico já existente, criado por Silva e Nirschl (2020) e Fernandes e Nirschl (2020), responsável pelo desenho de elementos relacionados a laje, o qual está disposto em uma página de internet do IFSP – Campus Votuporanga e pode ser acessado por meio do link: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrut-lajes.html>. Com isso, percebe-se que o IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) serve como uma base gráfica para módulos de cálculos de análise estrutural de lajes.

Figura 21 – Tela completa do IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020).



Fonte: O próprio autor (2022).

O IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), permite o desenho de uma laje, suas condições de contorno e entrada de três tipos de cargas (sobre toda a laje, sobre região e pontual). Este processo pode ser auxiliado acessando o Manual de Utilização, por meio do botão MANUAL. Para a implementação do módulo de análise estrutural da laje, objeto deste trabalho, são necessárias as equações algébricas dos deslocamentos e esforços. No caso de uma carga sobre toda a laje e de uma carga pontual, essas equações são apresentadas explicitamente por Soares (2004), conforme visto na seção FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA. Para carga sobre uma região, foram encontradas na bibliografia exposta na seção FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA apenas as equações bases, mas não as equações finais do deslocamento e esforços explícitos.

Com isso, foi necessário desenvolver a função do deslocamento gerado por uma carga sobre região, eq. (65) da seção RESULTADOS, a qual foi

deduzida por meio da implementação do coeficiente  $p_{mn}$  (53) de sua carga na função genérica do deslocamento para lajes apoiadas nos 4 bordos (49), ambas apresentadas em Soares (2004). Com as funções de deslocamentos para os três tipos de carga presentes no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) (sobre toda a laje, sobre região e pontual), foram utilizadas as relações: (35), (36) e (37) para se descobrir as funções algébricas dos momentos; (38) e (39) para as funções algébricas das cortantes.

Por meio da linguagem HTML primeiramente foi implementado, no botão Funções, o módulo Navier (Figura 21). O módulo foi desenvolvido por meio da linguagem *JavaScript* para que, quando acionado, crie a interface de análise estrutural de acordo com a solução de Navier (tela de saída), como observado na Figura 21. Com isso, utilizando HTML, foi criado o elemento *canvas*, que é a tela gráfica que desenha os diagramas. Depois, por HTML, criou-se o menu de opções, o qual o usuário pode escolher qual diagrama ele pretende analisar.

As funções foram implementadas computacionalmente no módulo, de modo que se elaborou um algoritmo para o cálculo dos esforços e deslocamento gerados pelos diferentes tipos de cargas, ou seja, para um dado ponto com coordenadas (x,y) da laje, é calculado o valor a partir de cada carga nesse ponto (superposição dos efeitos).

Para todos os tipos de cargas, compararam-se os diagramas e valores gerados no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) com os do RFEM 5 (DLUBAL, 2021). Além das três cargas citadas anteriormente, também há a presença do conjunto de cargas trem-tipo TB-450, o qual os momentos fletores foram comparados com o *software* T-Rüsch (KHOURI; SERAPIÃO; CARDOSO JUNIOR, [20??]) que utiliza as tabelas do método de Rüsch (1965) para solução de cargas do trem-tipo TB450.

Vale salientar que todas as funções algébricas apresentadas, a fim de comprovar suas veracidades, foram comparadas algebricamente pelo MathCad Prime 7 (PTC, 2021).

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo, apresenta-se os resultados obtidos pelo trabalho, desde as funções algébricas explicitadas até exemplos comparados com outros métodos.

### 4.1 FUNÇÕES ALGÉBRICAS EXPLICITADAS

As funções explicitadas e implementadas computacionalmente no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) a fim de criar os diagramas referentes a carga distribuída uniformemente sobre toda a laje são: (52) o deslocamento; (60) e (61) os momentos nas duas direções, respectivamente, x e y; (62) o momento torsor; (63) e (64) as cortantes nas duas direções, respectivamente, x e y.

$$M_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (60)$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (61)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_o(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (62)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 a} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (63)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 b} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (64)$$

Para a criação dos diagramas referentes a carga sobre região, obtiveram-se as funções de (65) a (70), sendo (65) referente ao deslocamento; (66) e (67) aos momentos fletores na duas direções, respectivamente x e y; (68) ao

momento torsor; (69) e (70) às cortantes na duas direções, respectivamente x e y.

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (65)$$

$$M_x(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (66)$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (67)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_0(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (68)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^3 a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (69)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^3 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi c}{a} \text{sen} \frac{n\pi d}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (70)$$

Conforme Szilard (2004),  $m$  e  $n$  varia em números inteiros (1,2,3... $\infty$ ) nas funções (deslocamento e esforços) decorrentes de uma carga uniformemente distribuída sobre uma região retangular (65), (66), (67), (68), (69) e (70).

Por fim, para a carga concentrada, as funções algébricas explicitadas responsáveis pela criação dos diagramas são: (59) referente ao deslocamento; (71) e (72) aos momentos fletores na duas direções, respectivamente x e y; (73) ao momento torsor; (74) e (75) às cortantes na duas direções, respectivamente x e y.

$$M_x(x, y) = \frac{4P}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (71)$$

$$M_y(x, y) = \frac{4P}{\pi^2 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (72)$$



$$M_{xy}(x, y) = -\frac{4P(1-\nu)}{(\pi ab)^2} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} mn}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \quad (73)$$

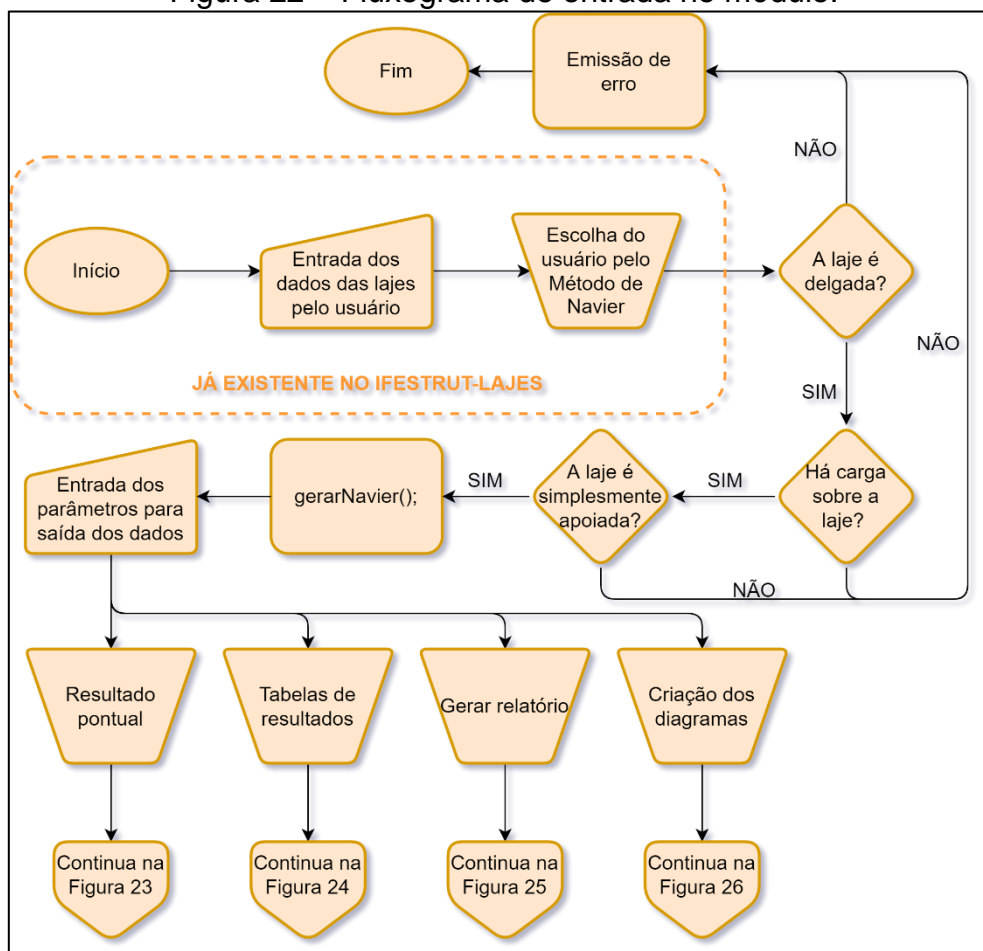
$$Q_x(x, y) = \frac{4P}{\pi a^2 b} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} m}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]} \quad (74)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{4P}{\pi ab^2} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x_1}{a} \text{sen} \frac{n\pi y_1}{b} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} n}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]} \quad (75)$$

## 4.2 FLUXOGRAMAS GERAIS

Da Figura 22 à Figura 26, é possível observar os fluxogramas que foram utilizados para elaboração do algoritmo do módulo. Assim sendo, na Figura 22, visualiza-se o fluxograma do algoritmo referente à entrada do módulo.

Figura 22 – Fluxograma de entrada no módulo.

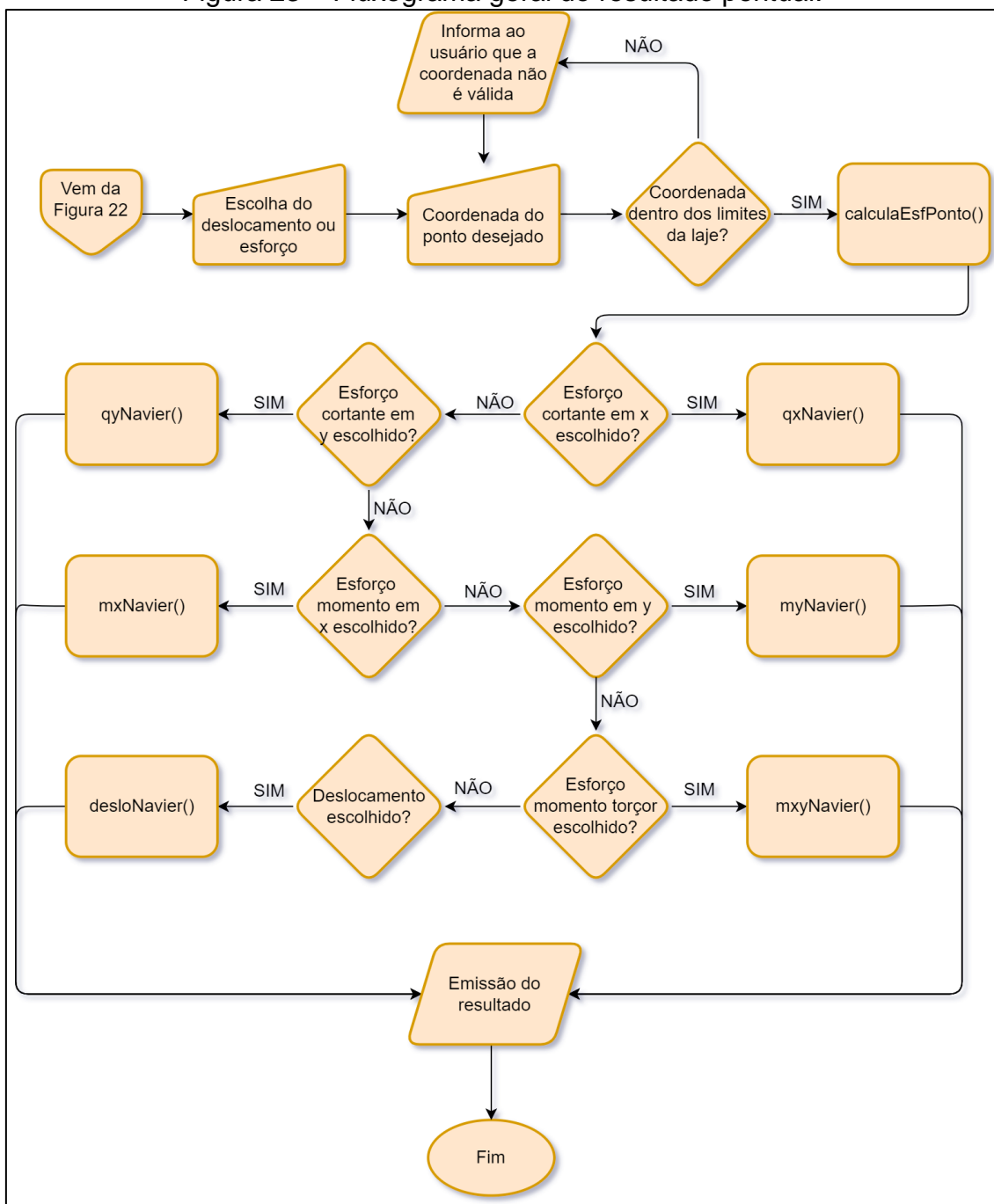


Fonte: O próprio autor (2022).

gerarNavier(): a função responsável por gerar a tela principal do módulo (tela de saída, ver Figura 21).

Por meio da Figura 23, visualiza-se o fluxograma geral do algoritmo do botão resultado pontual.

Figura 23 – Fluxograma geral do resultado pontual.



Fonte: O próprio autor (2022).

`qxNavier()` e `qyNavier()`: funções *JavaScript* responsáveis por realizar os cálculos referentes as funções algébricas da cortante na direção  $x$  e na direção  $y$ , respectivamente.

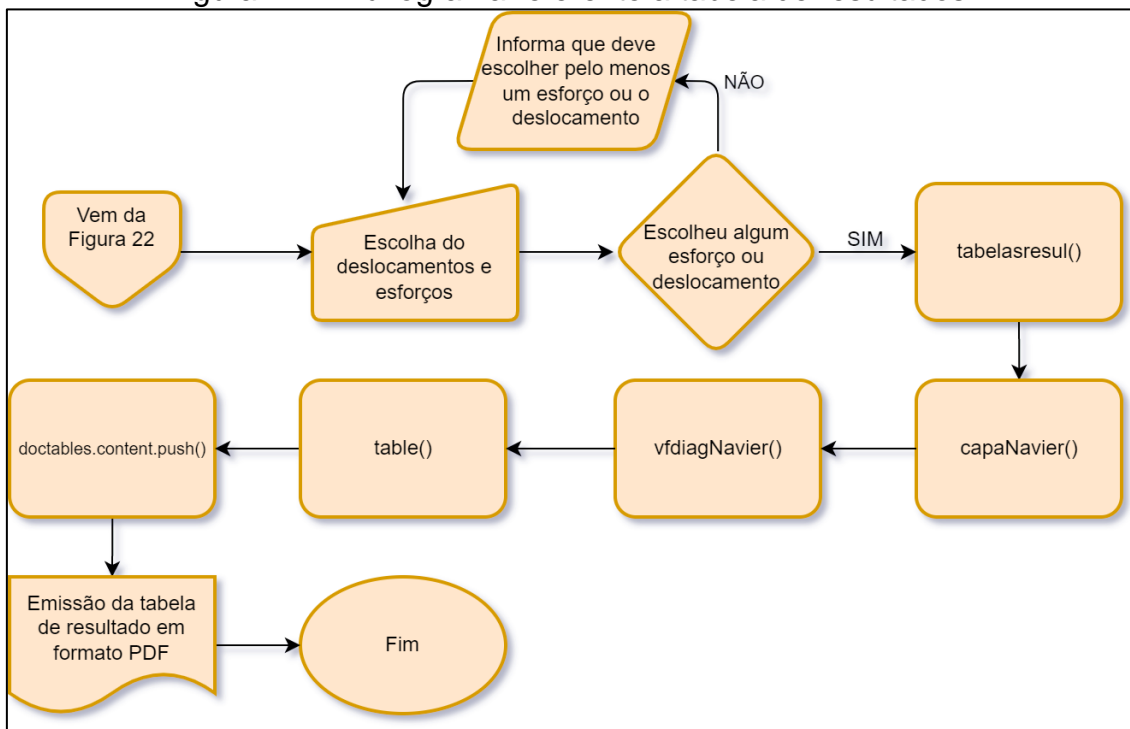
`mxNavier()` e `myNavier()`: realiza os cálculos referentes as funções algébricas do momento na direção  $x$  e na direção  $y$ , respectivamente.

`mxyNavier()`: executa o algoritmo para o obtenção do valor do momento fletor em determinado ponto.

`desloNavier()`: contém o algoritmo para o cálculo do deslocamento em determinado ponto.

Na Figura 24, observa-se o fluxograma geral do algoritmo da tabela de resultados.

Figura 24 – Fluxograma referente a tabela de resultados.



Fonte: O próprio autor (2022).

`tabelasresul()`: função geral acionada com o início do processo de geração de das tabela de resultados.

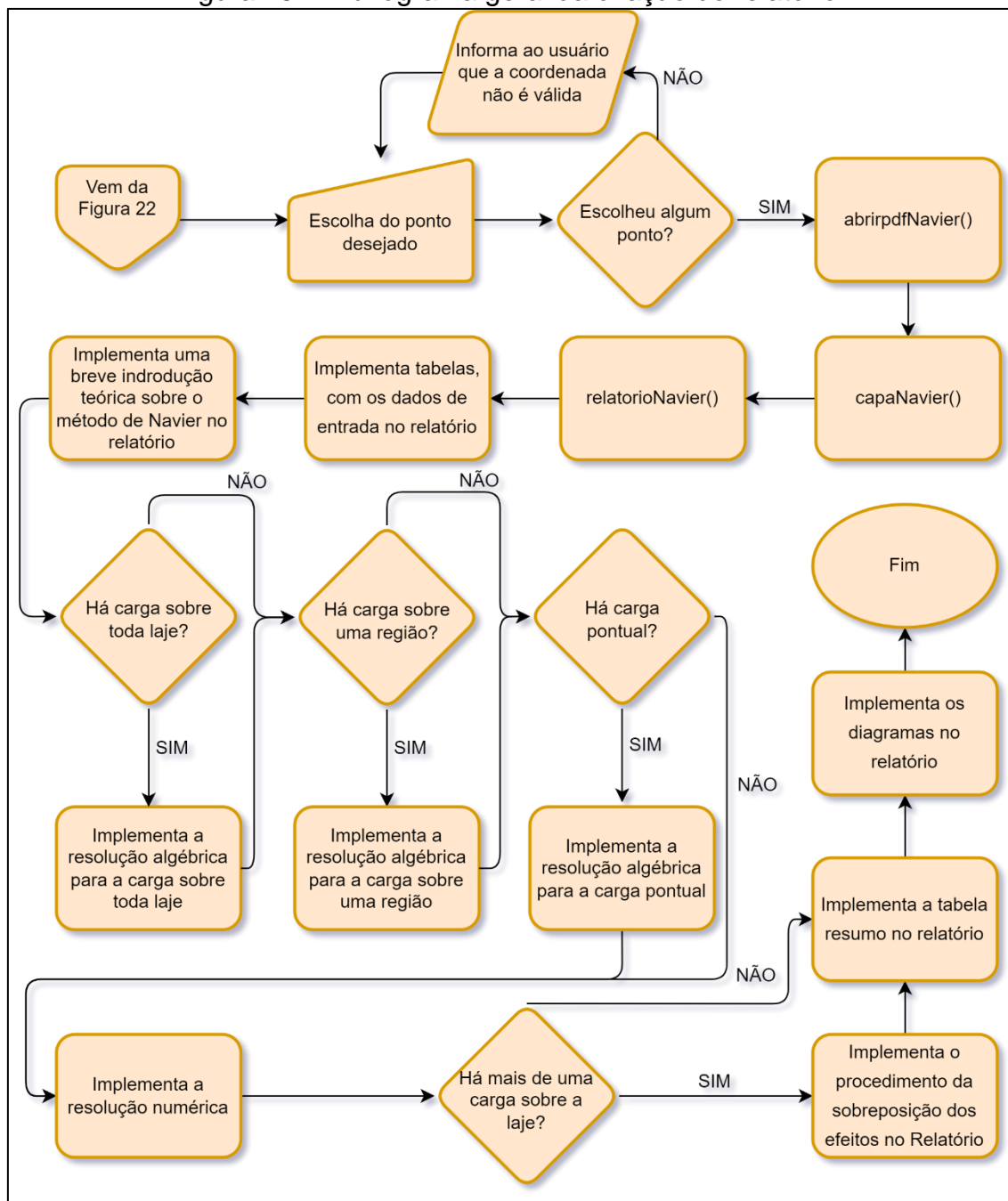
`capaNavier()`: gera a capa do documento em PDF contendo o nome do aluno, nome do orientador, data de produção etc.

`vfdiagNavier()`: calcula para cada ponto contido na laje, de acordo com o espaçamento definido pelo usuário, o esforço ou deslocamento analisado.

table(): arranja os dados calculados em objetos, aos moldes predefinidos pela biblioteca *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020), a fim de implementar tabelas no documento PDF.

doctables.content.push(): acrescenta os dados ao conteúdo da variável doctables, a qual é utilizada pela biblioteca *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020) para gerar o PDF.

Figura 25 – Fluxograma geral da criação do relatório.

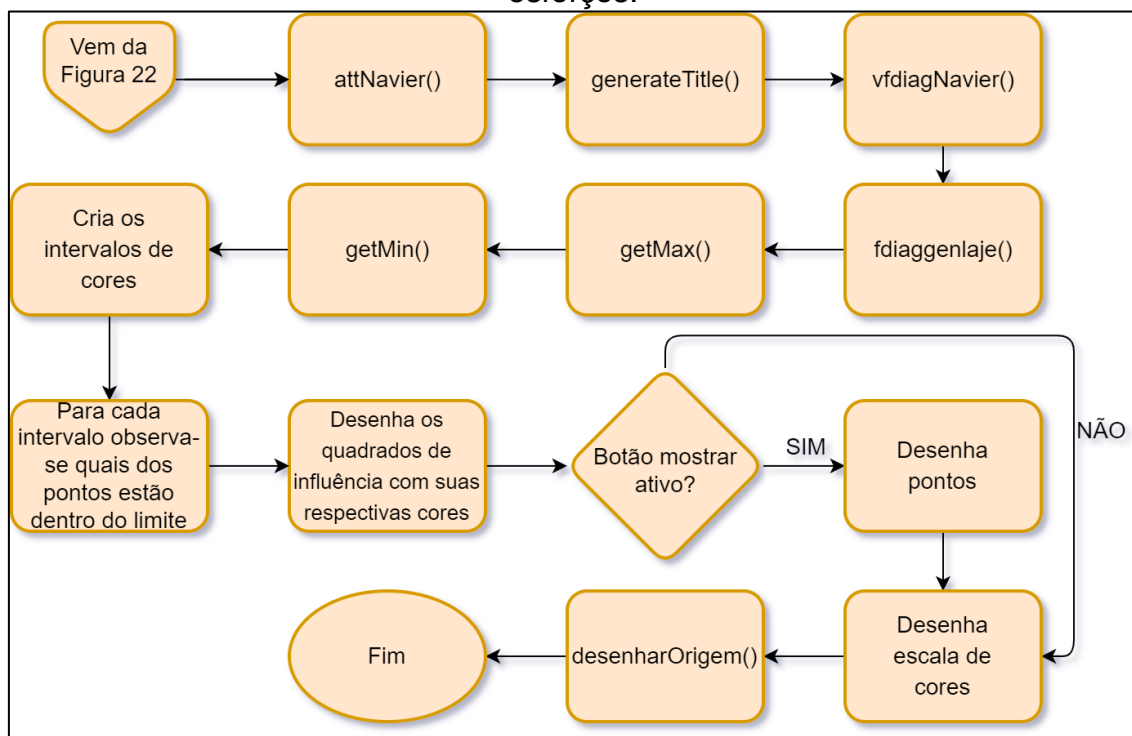


Fonte: O próprio autor (2022).

`abrirpdfNavier()`: função *JavaScript* que é acionada para dar início ao processo de geração do relatório.

`relatorioNavier()`: função que executa a implementação e estruturação das partes do relatório como: introdução teórica, resolução algébrica, resolução numérica, tabela resumo, superposição dos efeitos etc.

Figura 26 – Fluxograma geral da geração dos diagramas de deslocamento e esforços.



Fonte: O próprio autor (2022).

`attNavier()`: função que atualiza a tela de saída, limpa e desenha o novo diagrama analisado, sempre quando o usuário clica sobre algum botão de desenho de diagrama.

`generateTitle()`: gera o título para o diagrama, com o respectivo nome do esforço ou deslocamento e unidade escolhida, para ser plotado na tela de saída.

`fdiaggenlaje()`: função genérica que desenha o diagrama, de acordo com o método utilizado, nesse caso com os dados obtidos pelo `vfdiagNavier()`.

`getMax()`, `getMin()`: funções *JavaScript* responsáveis por pegar o valor máximo e mínimo, respectivamente, daqueles calculados pela `vfdiagNavier()`.

`desenharOrigem()`: desenha duas setas vermelhas com a indicação dos eixos x e y na tela de saída, de acordo com o método utilizado.

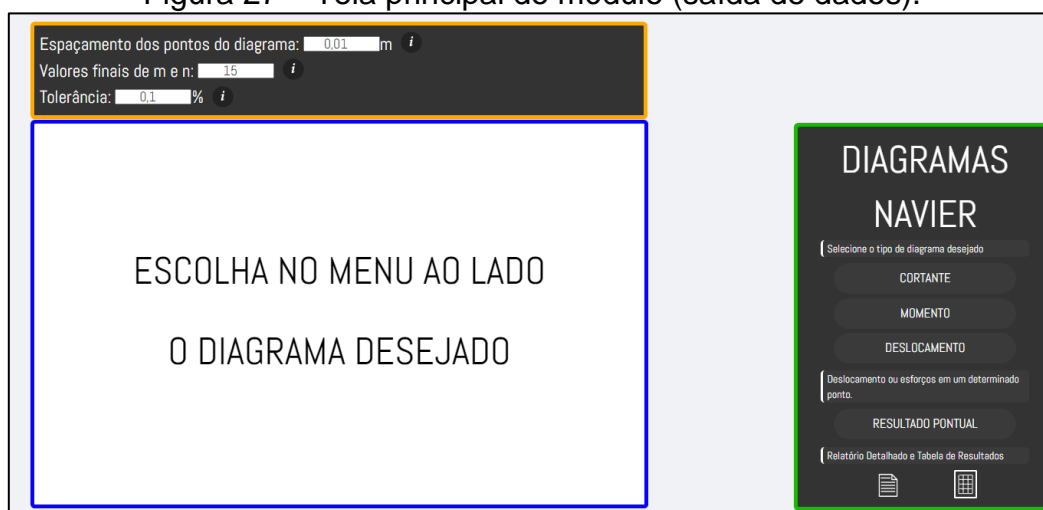
### 4.3 FUNCIONAMENTO DO MÓDULO DESTE TRABALHO

Para melhor compreensão, será mostrado o funcionamento e como se acessa cada ferramenta implementada pelo módulo. Tendo o usuário, no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), conforme explicado na METODOLOGIA, desenhado a laje e seus parâmetros, e clicado sobre o botão “FUNÇÕES” e, posteriormente, sobre “MÉTODO DE NAVIER”, caso os dados fornecidos tenham inconformidades com Método de Navier, uma mensagem de erro será mostrada ao usuário orientando tal inconformidade. Senão, é gerada a saída de dados inicial (ver Figura 27).

Com isso, observam-se na Figura 27 os fundamentais elementos da tela principal do módulo: contornado em azul tem-se a tela gráfica responsável pelo desenho dos diagramas, em laranja os parâmetros de cálculo e em verde o menu de opções.

Na Figura 28, podem ser observados os menus referentes aos esforços e deslocamento, que aparecem após o clique nos botões localizados no menu contornado em verde da Figura 27. Acessados os menus (Figura 28), notam-se as seguintes ferramentas: botão de desenhar o diagrama, botão com formato de seta no canto superior esquerdo que possibilita o usuário a retornar no menu principal, botão no canto superior direito (símbolo de engrenagem) o qual define o intervalo dos valores do diagrama, botão “MOSTRAR” que exhibe no diagrama os valores de cada ponto.

Figura 27 – Tela principal do módulo (saída de dados).



Fonte: O próprio autor (2022).

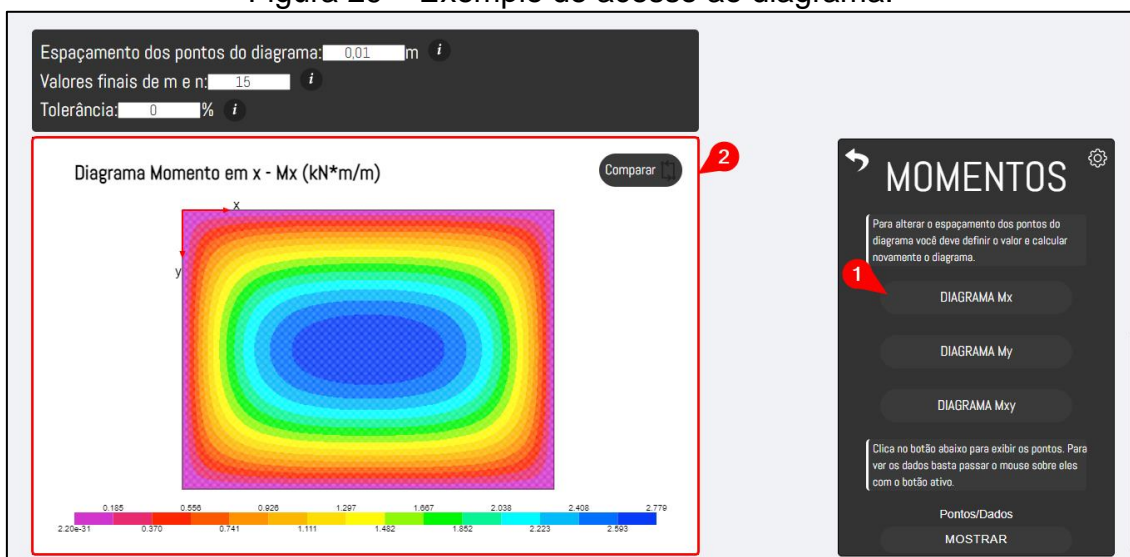
Figura 28 – Menus dos Diagramas.



Fonte: O próprio autor (2022).

O usuário escolhe qual diagrama deseja que o módulo desenhe na tela gráfica clicando sobre um dos botões que contenha a palavra “DIAGRAMA”, disposto nos menus (Figura 28). Na Figura 29, pode ser visto tal procedimento para o desenho de um diagrama.

Figura 29 – Exemplo de acesso ao diagrama.

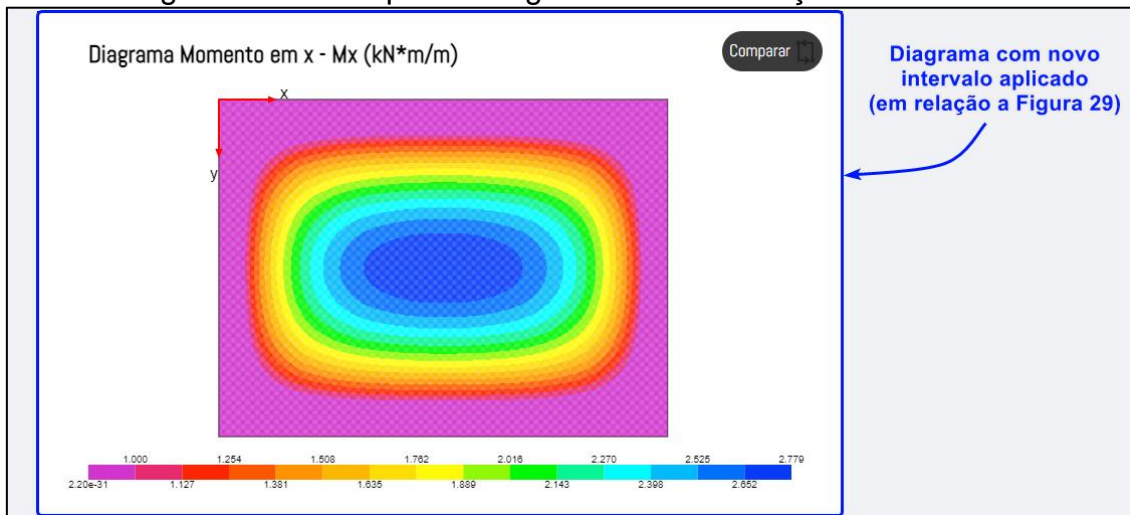


Fonte: O próprio autor (2022).

O botão de opção de intervalos, símbolo de engrenagem no canto superior direito dos menus (Figura 31), permite ao usuário alterar o crescimento/decrescimento de um intervalo do diagrama. Com isso, o usuário pode escolher entre três possibilidades para a criação de um intervalo, definindo: apenas mínimo (máximo será o calculado), apenas o máximo (mínimo será o

calculado) ou ainda mínimo e máximo. Para exemplificação observe a Figura 30, onde pode ser observado um diagrama com um intervalo definido. No caso, escolheu-se apenas definir o mínimo como 1 (Figura 31).

Figura 30 – Exemplo de diagrama com mudança de intervalo.



Fonte: O próprio autor (2022).

Figura 31 – Opções de intervalos.



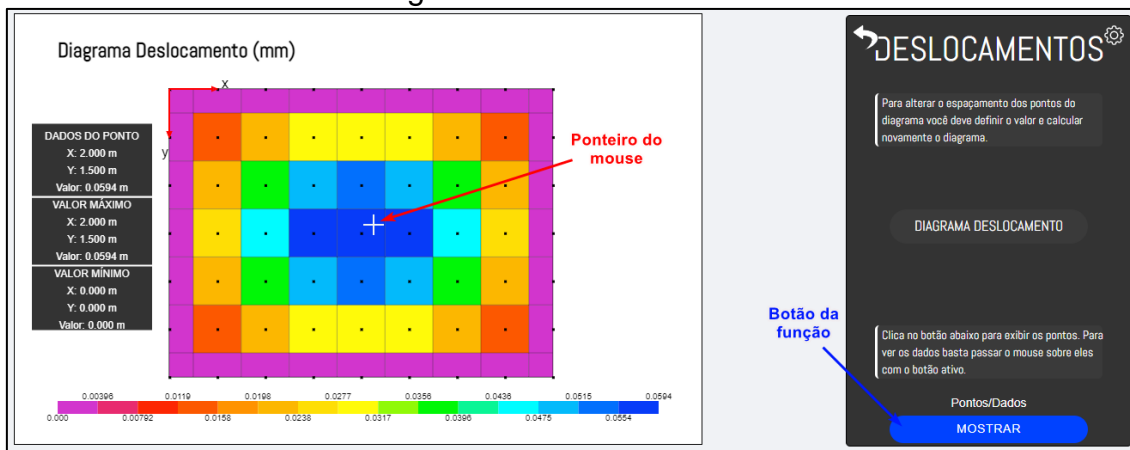
Fonte: O próprio autor (2022).

Ao clicar no botão “MOSTRAR” disponível nos menus (cortantes, momentos, deslocamento), visto em azul na Figura 32, o valor máximo e mínimo



do diagrama e suas coordenadas são exibidas a esquerda do diagrama. Além disso, o usuário pode manter o mouse sobre o quadrado de influência de um ponto desejado para que sejam exibidos, no lado esquerdo do diagrama, os dados desse ponto (coordenada e valor) (Figura 32).

Figura 32 – Botão mostrar.



Fonte: O próprio autor (2022).

O botão “RESULTADO PONTUAL”, disposto no menu principal (Figura 33), permite a obtenção do valor de um esforço ou deslocamento em determinado ponto sem a necessidade de desenhar o diagrama. Dessa forma, com um clique no botão “RESULTADO PONTUAL”, é emitido um alerta para que se escolha o esforço ou deslocamento e coordenada do ponto a fim de que o *software* calcule resultado pontual (Figura 33).

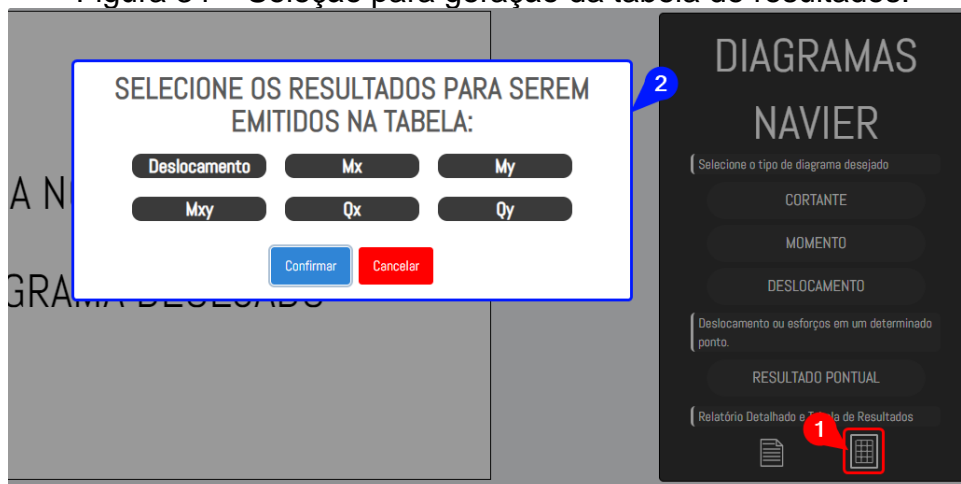
Figura 33 – Processo do Resultado Pontual.



Fonte: O próprio autor (2022).

Ao clicar sobre o botão com o ícone de tabela, no menu principal, uma janela flutuante (ver Figura 34) é emitida para que o usuário escolha quais resultados sejam inseridos na tabela. Com isso, ao clicar em confirmar, é gerado um PDF em uma nova guia contendo a tabela, conforme a Figura 35.

Figura 34 – Seleção para geração da tabela de resultados.



Fonte: O próprio autor (2022).

Figura 35 – Tabela de resultados.

x (m)	y (m)	Deslocamento (mm)	Mx (kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy (kN*m/m)	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
1.400	0.100	0.0498	0.0809	0.0740	0.192	-0.0751	1.141
1.500	0.100	0.0439	0.0742	0.0681	0.235	-0.110	1.046
1.600	0.100	0.0367	0.0676	0.0604	0.275	-0.139	0.943
1.700	0.100	0.0286	0.0570	0.0498	0.310	-0.182	0.784
1.800	0.100	0.0196	0.0433	0.0365	0.338	-0.255	0.580
1.900	0.100	0.00999	0.0250	0.0201	0.356	-0.313	0.327
2.000	0.100	7.84e-18	2.26e-17	1.71e-17	0.362	-0.373	2.84e-16
-6.38e-16	0.200	-1.27e-16	-3.24e-16	-2.41e-16	-0.349	0.681	-1.67e-15
0.100	0.200	0.0197	0.0470	0.0359	-0.343	0.583	0.252
0.200	0.200	0.0388	0.0823	0.0659	-0.326	0.480	0.465
0.300	0.200	0.0565	0.109	0.0908	-0.300	0.352	0.644
0.400	0.200	0.0726	0.130	0.111	-0.268	0.273	0.790
0.500	0.200	0.0868	0.144	0.125	-0.230	0.217	0.899
0.600	0.200	0.0986	0.157	0.137	-0.188	0.151	0.988
0.700	0.200	0.108	0.167	0.148	-0.144	0.118	1.062
0.800	0.200	0.115	0.172	0.153	-0.0970	0.0827	1.106
0.900	0.200	0.119	0.176	0.158	-0.0489	0.0373	1.137
1.00	0.200	0.120	0.178	0.159	-3.63e-16	1.23e-16	1.148
1.100	0.200	0.119	0.176	0.158	0.0489	-0.0373	1.137
1.200	0.200	0.115	0.172	0.153	0.0970	-0.0827	1.106
1.300	0.200	0.108	0.167	0.148	0.144	-0.118	1.062
1.400	0.200	0.0986	0.157	0.137	0.188	-0.151	0.988
1.500	0.200	0.0868	0.144	0.125	0.230	-0.217	0.899

Fonte: O próprio autor (2022).

O relatório pode ser gerado com um clique no botão com o ícone de documento no menu principal, logo após, uma janela flutuante é emitida para que se insira as coordenadas do ponto que ele deseja analisar (ver Figura 36). Com a inserção das coordenadas e um clique em confirmar, o relatório é gerado em uma nova guia no formato PDF.

Figura 36 – Coordenadas para emissão do relatório.



Fonte: O próprio autor (2022).

No relatório podem ser vistos os dados de entrada do usuário (Figura 37), uma breve introdução teórica sobre o método de Navier (Figura 37), uma resolução algébrica (Figura 38) que demonstra como obter as funções de deslocamento e esforços internos de acordo com as cargas de entrada, uma resolução numérica (Figura 39) para o ponto escolhido e os resultados (tabela resumo e os diagramas).

Figura 37 – Parte do relatório – dados de entrada e introdução teórica.

**APOIOS**

*Tabela 2 - Dados dos apoios.*

Tipo de apoio	Índice	Lado
Apoiada	0	0-1
Apoiada	1	1-2
Apoiada	2	2-3
Apoiada	3	3-0

**CARGA SOBRE TODA LAJE**

Por meio da Tabela 3 podem ser observados os dados da Carga Sobre Toda Laje.

*Tabela 3 - Dados da Cargas Sobre Toda Laje.*

Índice	Módulo (kN/m <sup>2</sup> )
0	2.000

**INTRODUÇÃO TEÓRICA - MÉTODO DE NAVIER**

O Método de Navier consiste em determinar uma solução algébrica para a Equação de Lagrange, uma equação diferencial que estabelece o comportamento físico de uma placa, desde que se tenha as condições de contorno (DIAS, 2019). Para lajes com espessuras muito menores do que as outras dimensões pode-se, conforme Szilard (2004), considerá-las em um sistema de coordenadas (x,y).

Fonte: O próprio autor (2022).

Figura 38 – Relatório – parte da resolução algébrica.

### RESOLUÇÃO ALGÉBRICA

Para uma laje simplesmente apoiada tem-se a função do deslocamento genérica (11) e o coeficiente de carga genérica (12).

#### FUNÇÕES REFERENTES A CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORMEMENTE SOBRE TODA LAJE

Como a laje está sujeita a uma carga  $q_0$  uniformemente distribuída (constante sobre toda laje), ela não depende de  $x$  e  $y$ :

$$p(x, y) = q_0 \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12), conseguimos o coeficiente ( $p_{mn}$ ) para tal carga:

$$p_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (11), obtemos a função algébrica do deslocamento de uma laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (15)$$

Tendo a função do deslocamento, conseguimos as funções dos esforços internos por meio das relações de (1) a (5).

Substituindo (15) em (1) e desenvolvendo, obtemos a função algébrica do momento fletor na direção  $x$  para tal carga (16). Analogamente, conquistamos a função algébrica do momento

5 de 22

fletor na direção  $y$  (17), a do momento torçor (18), a da cortante na direção  $x$  (19), a da cortante na direção  $y$  (20). Observe que para tais funções, devido a carga uniformemente distribuída sobre toda laje, os valores de  $m$  e  $n$  variam nos números ímpares.

$$M_x(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \nu \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (16)$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right]}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (17)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_0(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (18)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^3 a} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (19)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^3 b} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]} \quad (20)$$

Fonte: O próprio autor (2022).

Figura 39 – Relatório – parte da resolução numérica.

**DESLOCAMENTO - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE**

O deslocamento gerado pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (15). Por meio da Tabela 4 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

Tabela 4 - Resolução do Duplo Somatório da Função do Deslocamento.

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m <sup>2</sup> )	Diferença Percentual (%)
1	1	20.480	20.480	-
1	3	-1.010	19.470	4.931
1	5	0.122	19.592	0.625
1	7	-0.0260	19.566	0.133
1	9	0.00787	19.574	0.0402
1	11	-0.00298	19.571	0.0152
1	13	0.00132	19.572	0.00672
1	15	-0.000651	19.571	0.00333
3	1	-0.125	19.447	0.637
3	3	0.0281	19.475	0.144
3	5	-0.00917	19.466	0.0471
3	7	0.00337	19.469	0.0173
3	9	-0.00139	19.468	0.00712
3	11	0.000629	19.468	0.00323
3	13	-0.000312	19.468	0.00160
3	15	0.000167	19.468	0.000858
5	1	0.0100	19.478	0.0516

Conforme visualizado na Tabela 4 o somatório foi parado pelo critério da diferença percentual.

**Cálculo das constantes de (15):**

O valor de D é conseguido por meio de (7):

$$D = (210000000*(0.03^3))/(12*(1-0.3^2)) = 519.231 \text{ [kN*m]}$$

Constante da função:

$$(16)/((\pi^6)*D) = (16)/((\pi^6)*519.231) = 0.0000321 \text{ [1/(kN*m)]}$$

$$\Sigma\Sigma qo*u \text{ (conforme visualizado na Tabela)} = 19.468 \text{ [kN*m}^2\text{]}$$

**Valor de w(1,2):**

$$w(1,2) = 0.0000321*19.468 = 0.000624 \text{ m}$$

Fonte: O próprio autor (2022).

Parte do código *JavaScript* utilizado para geração do relatório pode ser visualizada no APÊNDICE A. Além disso, no APÊNDICE B pode-se observar o relatório completo do Exemplo 1 do item 4.5.

#### 4.4 PROCESSO DE VERIFICAÇÃO DO CRITÉRIO DE PARADA

Computacionalmente, o critério de parada dos cálculos das funções de Navier proposto pelo módulo seguem os dois parâmetros citados anteriormente (valores finais de  $m, n$  e a tolerância). Com isso, inicialmente, o algoritmo foi programado para que verificasse, a cada termo, a diferença percentual entre a parcela atual e a parcela anterior do somatório até atingir o valor de  $m, n$  final adotado pelo usuário. Mas, caso a diferença percentual (em determinado valor de  $m, n$ ) fosse menor que a tolerância escolhida pelo usuário, o algoritmo parava o somatório. Entretanto, foi analisado que, conforme os valores de  $m, n$  variam, nem sempre as diferenças percentuais dos termos das funções de Navier diminuem. Para um melhor entendimento considere uma tolerância adotada de 0,01%. Pela Tabela 2, fica evidente que o algoritmo pararia em  $m = 7$  e  $n = 15$ , mas em  $m = 9$  e  $n = 1$  a diferença percentual aumenta, ficando novamente maior que a tolerância.

Dessa forma, quando o critério de parada é programado para ser verificado a cada termo, a inconsistência nos resultados se torna evidente nos diagramas, onde são notadas distorções. De início, acreditava-se que tais distorções estavam relacionadas com a tolerância adotada pelo usuário, no entanto, observou-se que sua diminuição não necessariamente implica em um menor número de distorções. Na Figura 40, podem ser visualizados diagramas com tais distorções, cuja informações desses estão contidas na Tabela 3.

Tabela 2 – Exemplo para análise do critério de parada.

$m$	$n$	Diferença Percentual (%)
7	15	0,0092%
9	1	0,2207%
9	3	0,0704%

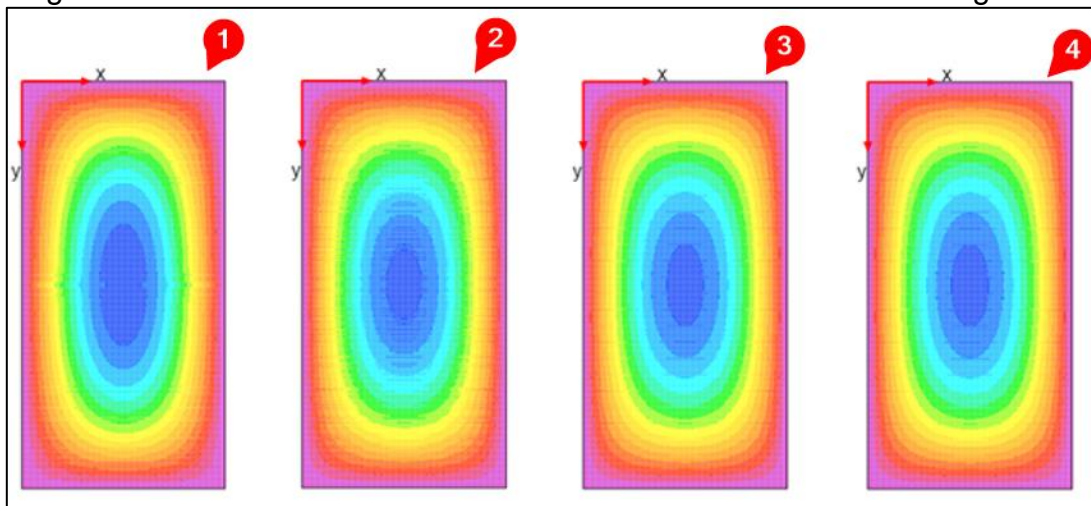
Fonte: O próprio autor (2022).

Tabela 3 – Informações dos diagramas contidos na Figura 40.

Diagrama	Esforços	Tolerância adotada
1	$M_x$	0,001%
2	$M_x$	0,0001%
3	$M_x$	0,00001%
4	$M_x$	0,000001%

Fonte: O próprio autor (2022).

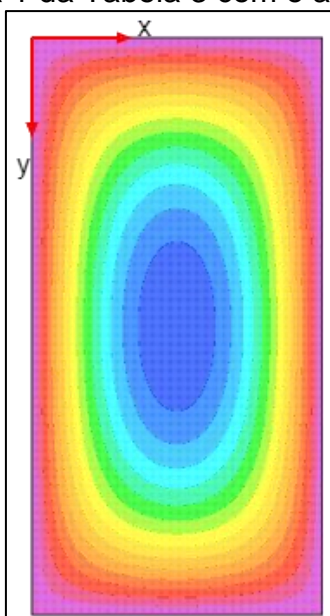
Figura 40 – Influência da tolerância verificada a cada termo nos diagramas.



Fonte: O próprio autor (2022).

Nesse sentido, o algoritmo foi programado para verificar somente quando  $m$  varia, já que é nesse termo que a diferença percentual sempre aumenta e as distorções nos diagramas não acontecem. Na Figura 41, pode ser visualizado o diagrama 1 da Figura 40 com critério de parada programado desta maneira (veja que desaparecem as distorções).

Figura 41 – Diagrama 1 da Tabela 3 com o atual critério de parada.



Fonte: O próprio autor (2022).

Especificamente para algumas funções da carga sobre região e pontual, foram notadas outras particularidades. Nelas o valor de  $m, n$  variam nos inteiros (1,2,3...), de modo que, quando  $m$  ou  $n$  é par e  $x$  ou  $x_i$  ( $x$  é o ponto analisado e

$x_i$  é a coordenada em  $x$  do centro da carga) é igual a  $a/2$  (metade da largura da laje) o valor do termo do duplo somatório pode resultar muito próxima a 0; por conseguinte, a diferença percentual também. Analogamente, acontece com  $y$  e  $y_i$ , quando um ou outro é  $b/2$  (metade da altura). Portanto, como a verificação é feita só quando  $m$  varia, a convergência sempre acaba parando em  $m = 2$  e  $n = 1$  nessas funções, conforme observado na Tabela 4.

Tal situação também gera distorções nos diagramas, principalmente, quando se tem mais de uma carga sobre região. Com isso, o usuário pode definir o critério de parada apenas pelo número final de  $m, n$ , adotando a tolerância igual a 0%, tendo em vista que, numericamente, dificilmente a diferença percentual chega exatamente em 0%.

Tabela 4 – Convergência nas funções de carga sobre região e pontual.

$m$	$n$	Valor do termo	Diferença percentual (%)
1	1	34,895	-
1	2	-3E-16	0,0000%
1	3	4,8705	13,9579%
1	4	-2E-16	0,0000%
2	1	-5E-16	0,0000%

Fonte: O próprio autor (2022).

## 4.5 EXEMPLOS

A seguir, apresentam-se exemplos com a finalidade de comparar os resultados (formas dos diagramas e/ou valores máximos) obtidos pelo módulo (método de Navier) com outros métodos, por exemplo, o MEF (Método dos Elementos Finitos).

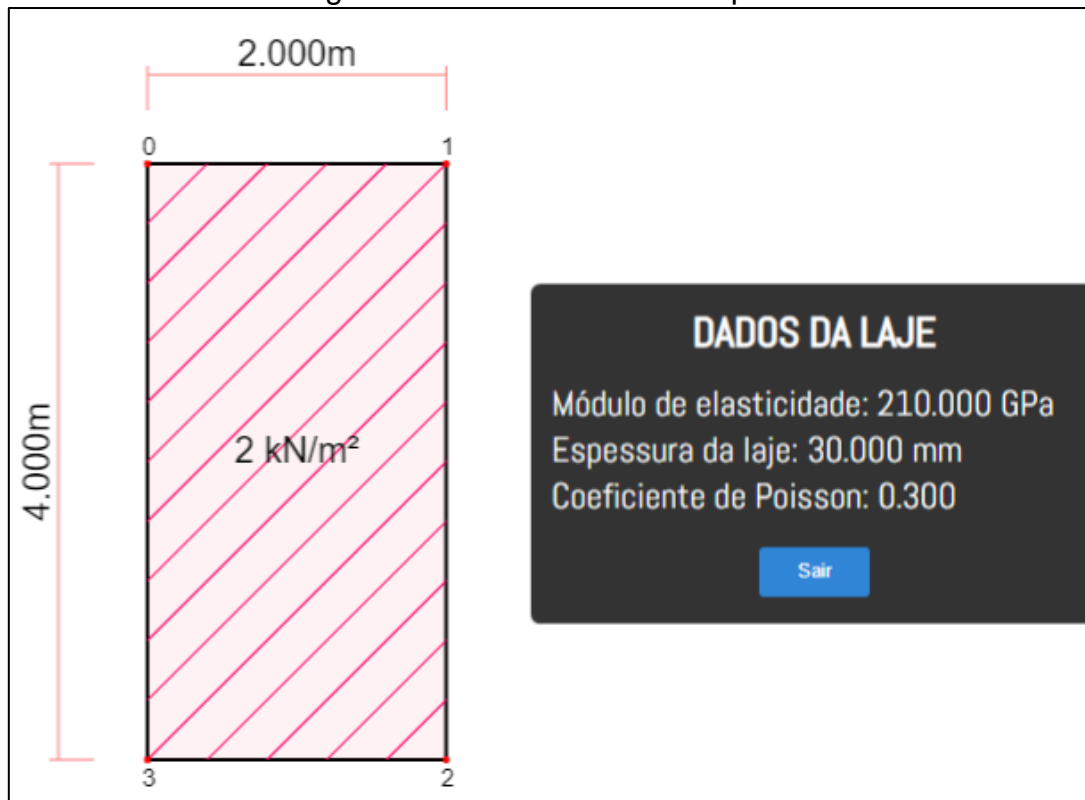
Com isso, o *software* RFEM 5 (DLUBAL, 2022) foi utilizado para comparação de resultados, sendo os modelos criados em análise linear e com malha de elementos finitos de 5 por 5 cm para o Exemplo 1, 10 por 10 cm para o Exemplo 2 e 1 por 1 cm para o Exemplo 3 (tais malhas foram refinadas até que os valores atingissem uma convergência satisfatória).

### 4.5.1 Exemplo 1 – Carga distribuída sobre toda a laje



Por meio da Figura 42, nota-se os dados de uma laje de 4 lados apoiados com dimensões 2x4 (m) sujeita a uma carga uniforme de  $2\text{kN}/\text{m}^2$ .

Figura 42 – Detalhes do Exemplo 1.



Fonte: O próprio autor (2022).

Com a entrada desses dados no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020), admitindo  $m, n = 15$  e tolerância de 0,01%, conseguimos os diagramas apresentados na Figura 43, Figura 44 e Figura 45. Para efeito de comparação, na Figura 46 tem-se o diagrama do deslocamento gerado pelo RFEM 5 (DLUBAL, 2022), o qual apresenta semelhança com o gerado pelo módulo (Figura 43) nas formas das curvas e seus valores. Além disso, para os valores máximos dos esforços e deslocamento, tem-se as comparações contidas nas Tabelas 5 e 6.

Na Tabela 5, comparam-se os valores máximos de  $M_x$  e  $M_y$  com o Método de Marcus tabelas clássicas apresentadas, por exemplo, em Diel (2018, p.75). Convém destacar que para a comparação com Método de Marcus (Tabela 5) adotou-se  $\nu = 0$ , já que não foi encontrado em nenhuma bibliografia a comprovação do valor de  $\nu$  para tabelas do Método de Marcus, bem como por

meio de testes acredita-se que o  $\nu = 0$  devido os resultados serem mais próximos aos de Navier.

Já na Tabela 6, tem-se a comparação dos valores máximos com o RFEM 5 (DLUBAL, 2022) (MEF).

Figura 43 – Diagramas do deslocamento e  $M_{xy}$  do Exemplo 1.

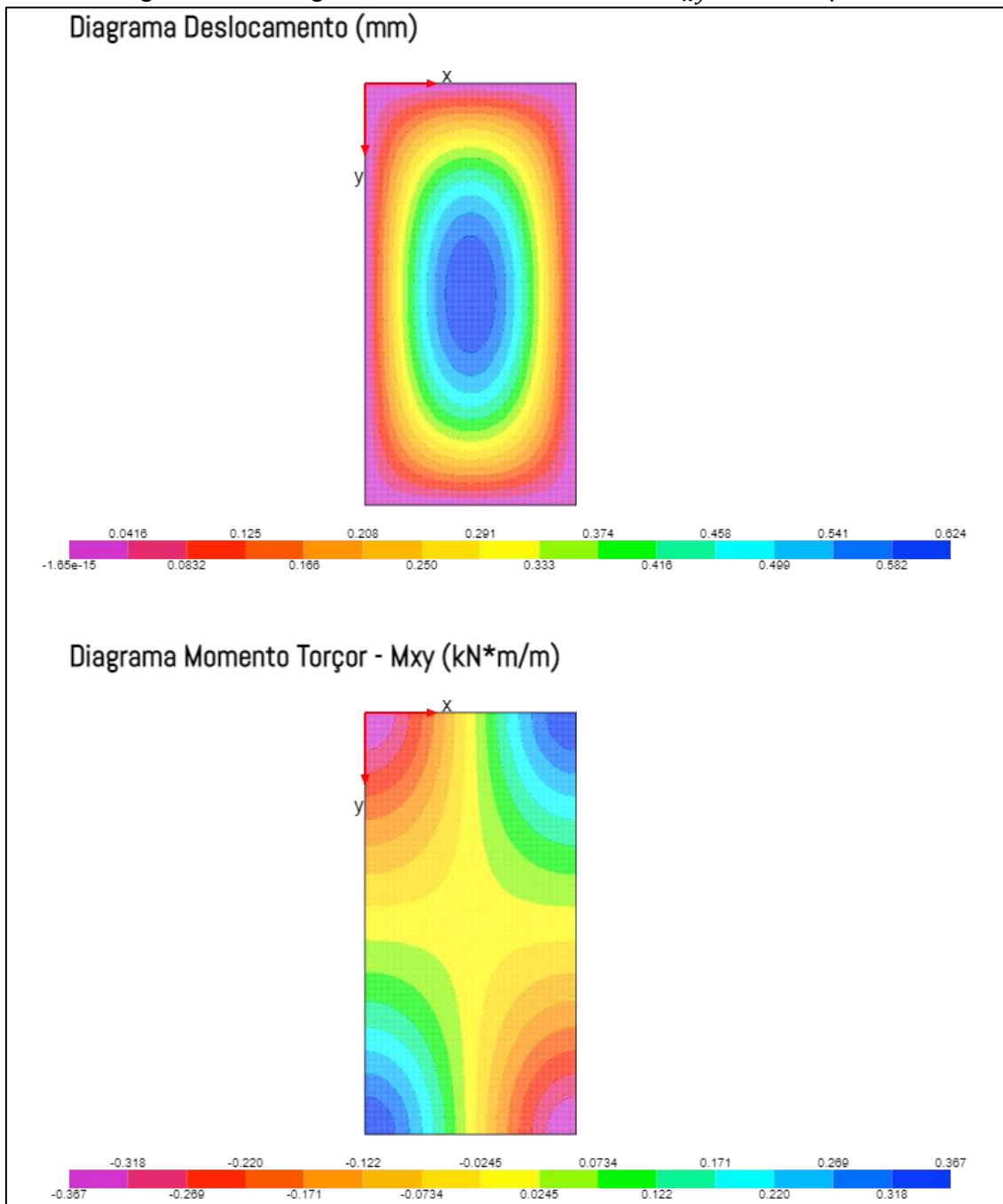


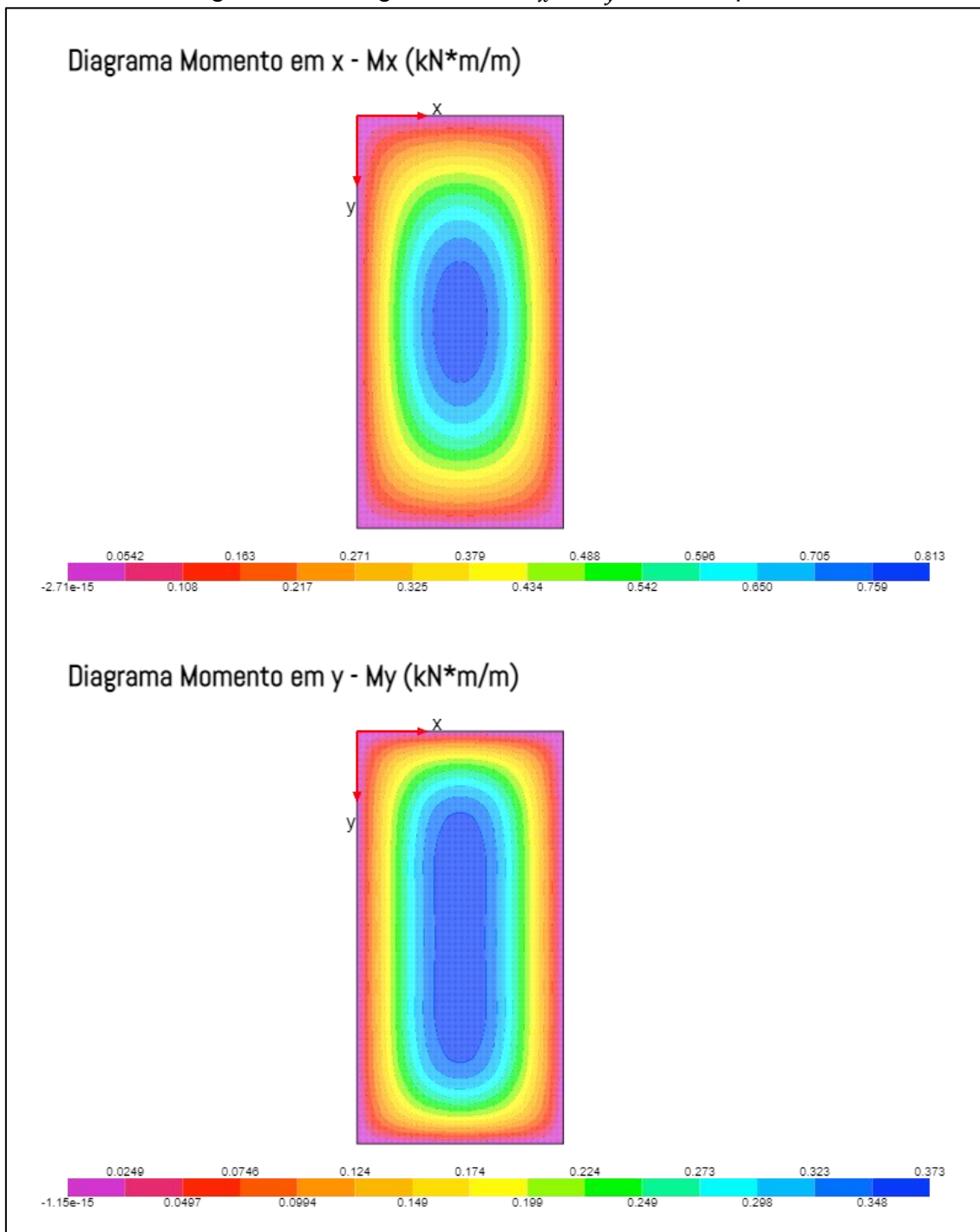
Figura 44 – Diagramas do  $M_x$  e  $M_y$  do Exemplo 1.

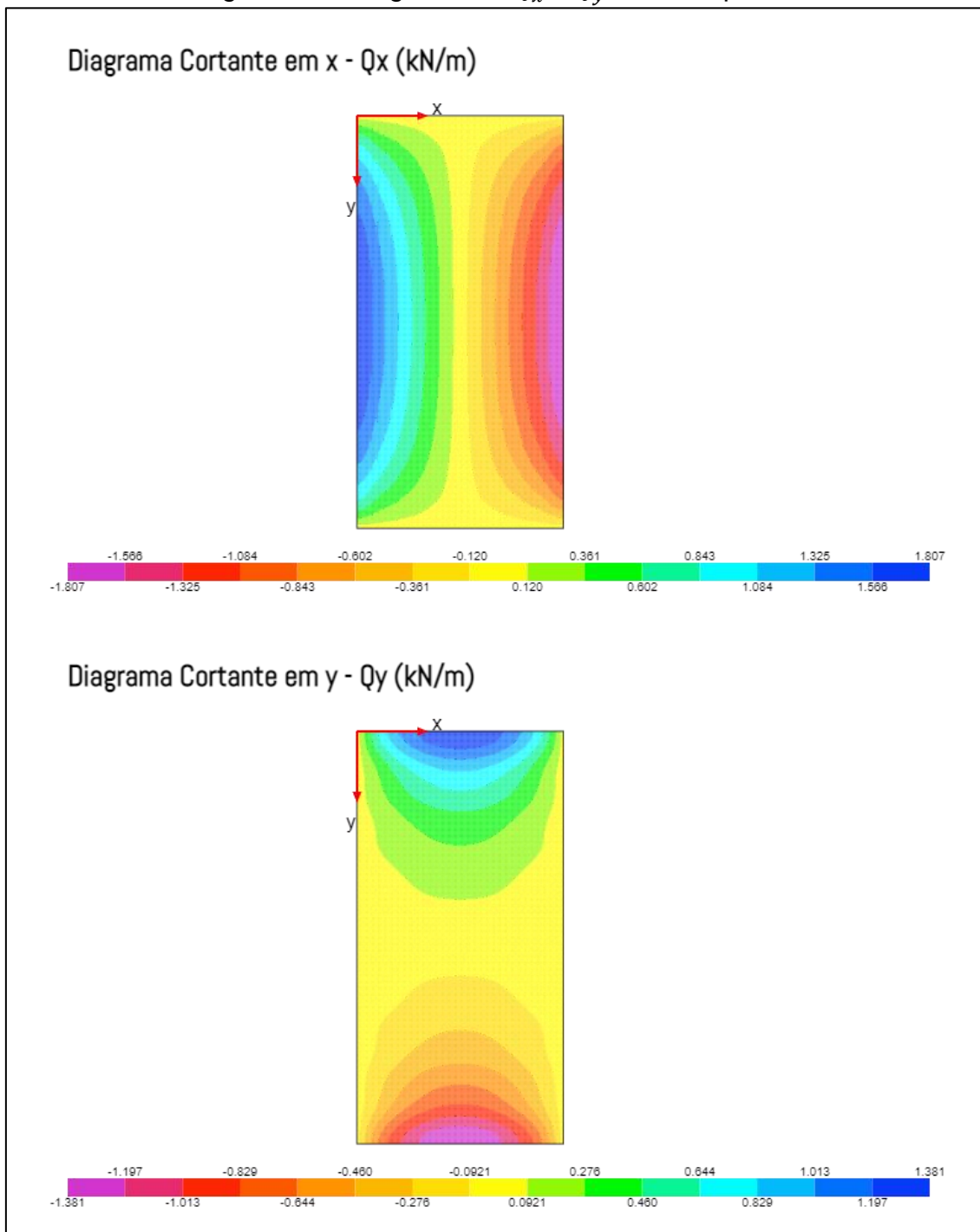
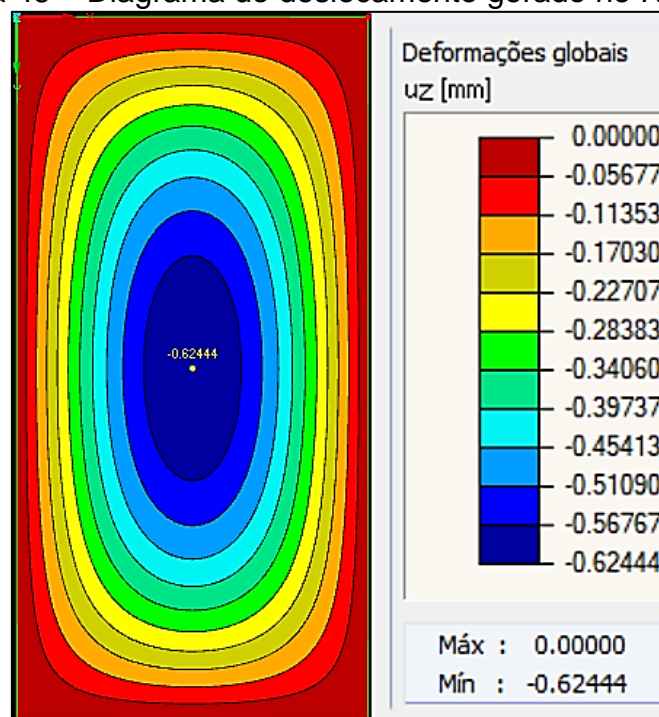
Figura 45 – Diagrama do  $Q_x$  e  $Q_y$  do Exemplo 1.

Figura 46 – Diagrama do deslocamento gerado no RFEM 5.



Fonte: Adaptado do RFEM 5 (2022).

Tabela 5 – Comparações Navier e Marcus,  $\nu$  adotado como 0.

Momentos máximos	Marcus	Navier	Diferença (%)
$M_x$ (kN * m/m)	0,757	0,772	1,943%
$M_y$ (kN * m/m)	0,189	0,200	5,500%

Fonte: O próprio autor (2022).

Pela Tabela 5, observa-se que os resultados de Navier são próximos e maiores aos obtidos pelo Método de Marcus.

Tabela 6 – Comparações do módulo (Navier) com RFEM 5 (MEF),  $\nu = 0,3$ .

Deslocamentos e esforços	RFEM 5 (MEF)			Navier			Diferença (%)
	x (m)	y (m)	Valor	x (m)	y (m)	Valor	
$w$ (mm)	1	2	0,62444	1	2	0,62426	0,0288
$M_x$ (kN * m/m)	1	2	0,81347	1	2	0,81320	0,0332
$M_y$ (kN * m/m)	1	1,4	0,37261	1	1,32	0,37273	0,0322
	1	2,60	0,37261	1	2,68	0,37273	0,0322
$M_{xy}$ (kN * m/m)	0	4	0,37018	0	4	0,36824	0,5268
	2	0	0,37018	2	0	0,36824	0,5268
$Q_x$ (kN/m)	0	2	1,86012	0	1,85	1,80706	2,9363
$Q_y$ (kN/m)	1	0	1,47879	1	0	1,37676	7,4109

Fonte: O próprio autor (2022).

Analisando os resultados contidos na Tabela 6, para o momento fletor na direção  $y$  ( $M_y$ ) e momento torsor ( $M_{xy}$ ), os valores máximos foram comparados em dois pontos, os quais as coordenadas são simétricas em relação ao centro da placa.

Nota-se que, com o  $m, n = 15$ , os valores máximos de deslocamento e momento fletor na direção  $x$  ( $M_x$ ) obtidos por Navier são semelhantes e ocorrem nos mesmos pontos que os obtidos pelo MEF (Método dos Elementos Finitos). Já para o momento fletor na direção  $y$  ( $M_y$ ) e as cortantes ( $Q_x$  e  $Q_y$ ) os valores máximos não ocorrem no mesmo ponto e há diferenças maiores entre os valores das cortantes.

Com isso, percebe-se que a convergência dessas funções de Navier necessitam de altos valores finais de  $m, n$  e/ou uma baixa tolerância. Pela Tabela 7, adotando a tolerância como 0% e aumentando os valores finais de  $m$  e  $n$ , visualiza-se a que os valores máximos obtidos pelo método de Navier passam a ocorrer em pontos mais próximos daqueles do MEF (Tabela 6), havendo também diminuição na diferença percentual entre os métodos.

Tabela 7 – Convergência das funções de Navier.

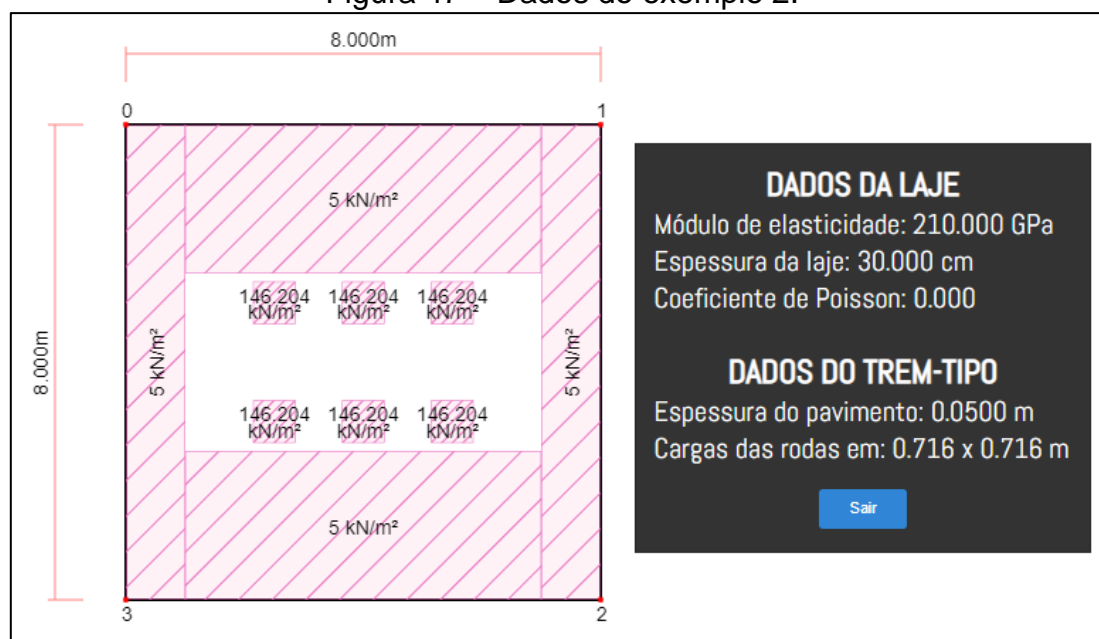
Deslocamentos e esforços	Navier		Valor	Diferença com MEF (Tabela 6) (%)
	x (m)	y (m)		
$m, n = 35$				
$M_y$ ( $kN * m/m$ )	1	1,43	0,37265	0,01073
	1	2,57	0,37265	0,01073
$Q_x$ ( $kN/m$ )	0	2,07	1,83712	1,25196
$Q_y$ ( $kN/m$ )	1	0	1,43366	3,14789
$m, n = 50$				
$M_y$ ( $kN * m/m$ )	1	1,4	0,37261	0,00000
	1	2,6	0,37261	0,00000
$Q_x$ ( $kN/m$ )	0	2	1,84437	0,85395
$Q_y$ ( $kN/m$ )	1	0	1,44654	2,22946
$m, n = 75$				
$M_y$ ( $kN * m/m$ )	1	1,42	0,37262	0,00268
	1	2,58	0,37262	0,00268
$Q_x$ ( $kN/m$ )	0	2	1,84926	0,58726
$Q_y$ ( $kN/m$ )	1	0	1,45749	1,46142

Fonte: O próprio autor (2022).

#### 4.5.2 Exemplo 2 – Carga distribuída sobre região retangular

Na Figura 47, podem ser observados os dados do conjunto de cargas trem-tipo TB450 disposto em uma laje simplesmente apoiada com dimensões de 8x8 m.

Figura 47 – Dados do exemplo 2.



Fonte: O próprio autor (2022).

Na Tabela 8, pode ser visualizada a diferença entre os resultados de Navier com o software T-Rüsch (KHOURI; SERAPIÃO; CARDOSO JUNIOR, [20??]), que utiliza o método de Rüsch (1965) para o cálculo dos momentos fletores gerados pelo conjunto de carga do trem-tipo TB450. Já na Tabela 9, tem-se a comparação entre os resultados de Navier com o software RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

Para obtenção dos resultados de Navier, foi considerado espaçamento entre os pontos igual a 0,1m; tolerância de 0% (para o algoritmo considerar apenas os valores finais de  $m, n$ ); número final de  $m, n$  igual a 50.

Tabela 8 – Comparação dos valores máximos entre Navier e T- Rüsch.

<b>Esforços</b>	<b>T-Rüsch</b>	<b>Navier</b>	<b>Diferença (%)</b>
$M_x$ (kN * m/m)	44,747	45,335	1,297
$M_y$ (kN * m/m)	46,585	47,433	1,787

Fonte: O próprio autor (2022).

Observa-se, conforme a Tabela 8, que as diferenças percentuais entre os valores dos momentos fletores de Navier e as tabelas de Rüsç (1965) são pequenas.

Tabela 9 – Comparação com o RFEM 5 (MEF).

Deslocamentos e esforços	RFEM 5 (MEF)			Navier			Diferença (%)
	x (m)	y (m)	Valor	x (m)	y (m)	Valor	
$w$ (mm)	4,00	4,00	0,6020	4,00	4,00	0,6019	0,0266
$M_x$	4,00	3,40	45,3913	4,00	3,50	45,3345	0,1252
(kN * m/m)	4,00	4,60	45,3913	4,00	4,50	45,3345	0,1252
$M_y$	4,00	3,10	47,4356	4,00	3,10	47,4327	0,0060
(kN * m/m)	4,00	4,90	47,4356	4,00	4,90	47,4327	0,0060
$M_{xy}$	0,00	8,00	43,0489	0,00	0,00	43,0188	0,0700
(kN * m/m)	8,00	8,00	43,0489	8,00	8,00	43,0188	0,0700
$Q_x$	2,10	3,00	45,0291	2,10	3,10	45,0723	0,0959
(kN/m)	2,10	5,00	45,0291	2,10	4,90	45,0723	0,0959
$Q_y$	4,00	2,60	41,2213	4,00	2,60	41,3114	0,2182
(kN/m)	4,00	5,40	41,2213	4,00	2,60	41,3114	0,2182

Fonte: O próprio autor (2022).

Percebe-se na Tabela 9 que, o módulo (Navier) resulta valores máximos próximos aos obtidos pelo RFEM 5 (DLUBAL, 2022). Cabe destacar que as coordenadas dos valores máximos dos métodos (Navier e MEF) são idênticas.

Da Figura 48 à Figura 50, visualizam-se os diagramas gerados pelo módulo de Navier (aqui apresentado) do IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020). A fim de comparação, na Figura 51, tem-se o diagrama do momento fletor na direção x e na direção y gerados pelo RFEM 5 (DLUBAL, 2022), sendo notória a semelhança das curvas.



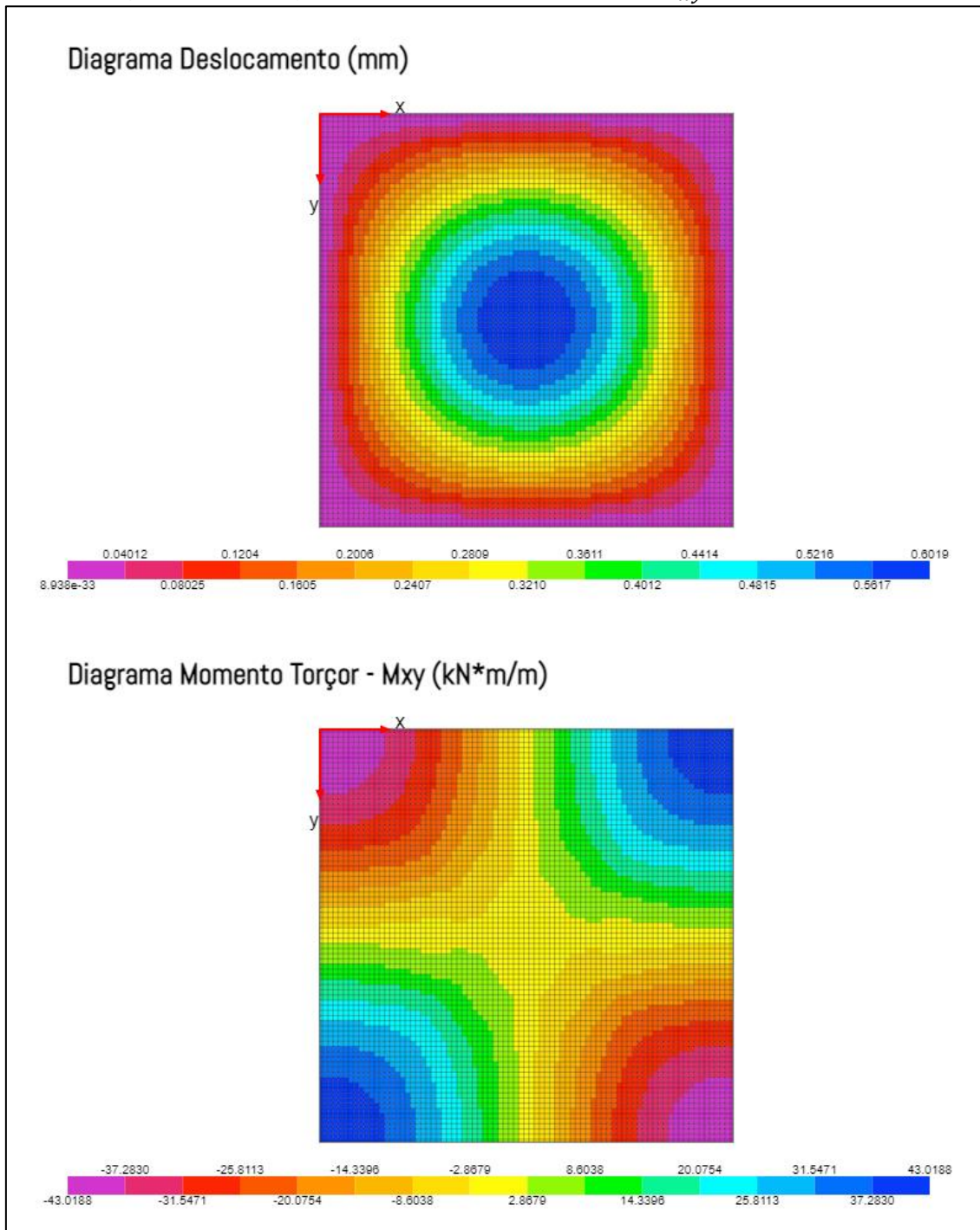
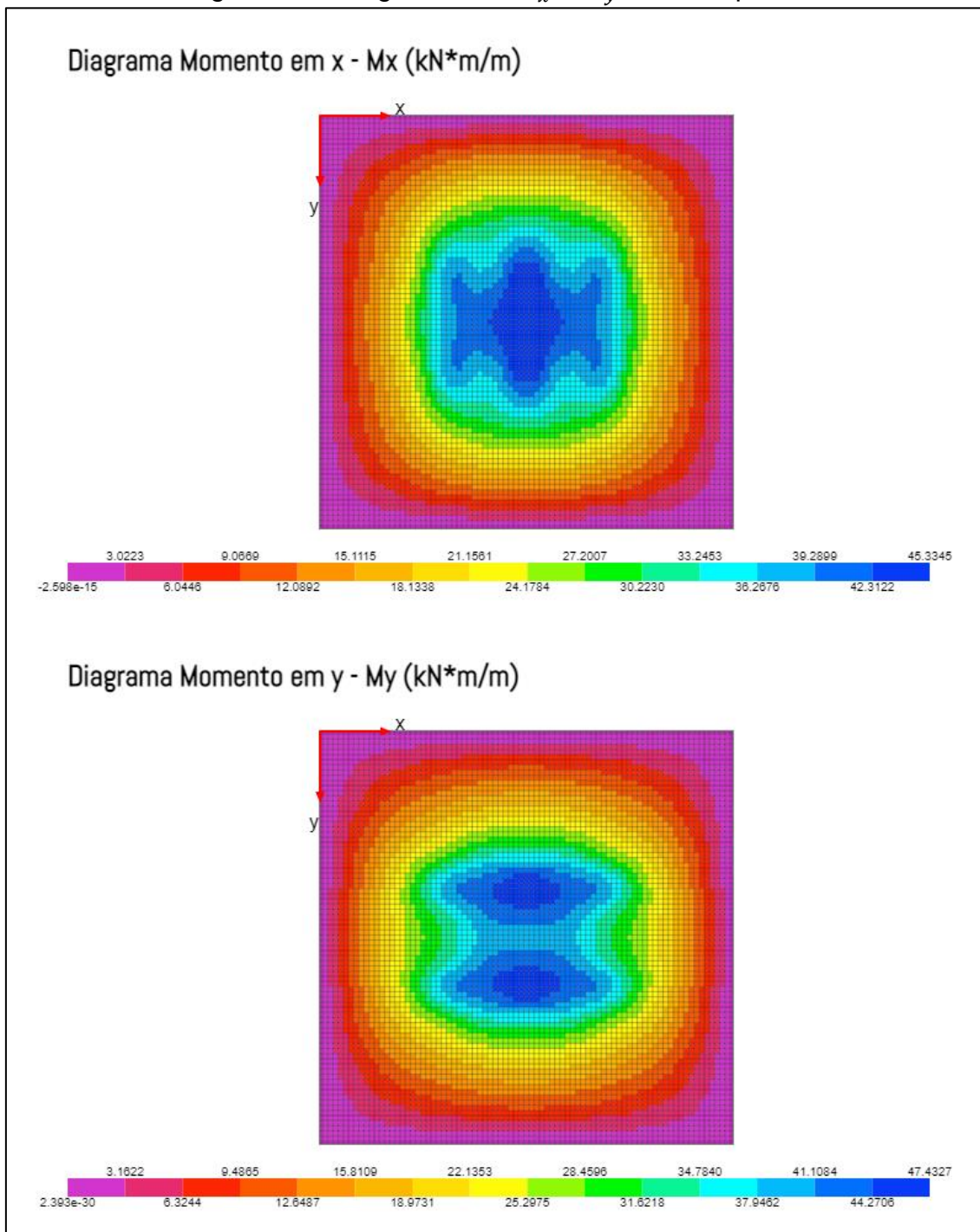
Figura 48 – Diagrama do deslocamento e de  $M_{xy}$  do Exemplo 2.

Figura 49 – Diagramas do  $M_x$  e  $M_y$  do Exemplo 2.

Fonte: O próprio autor (2022).

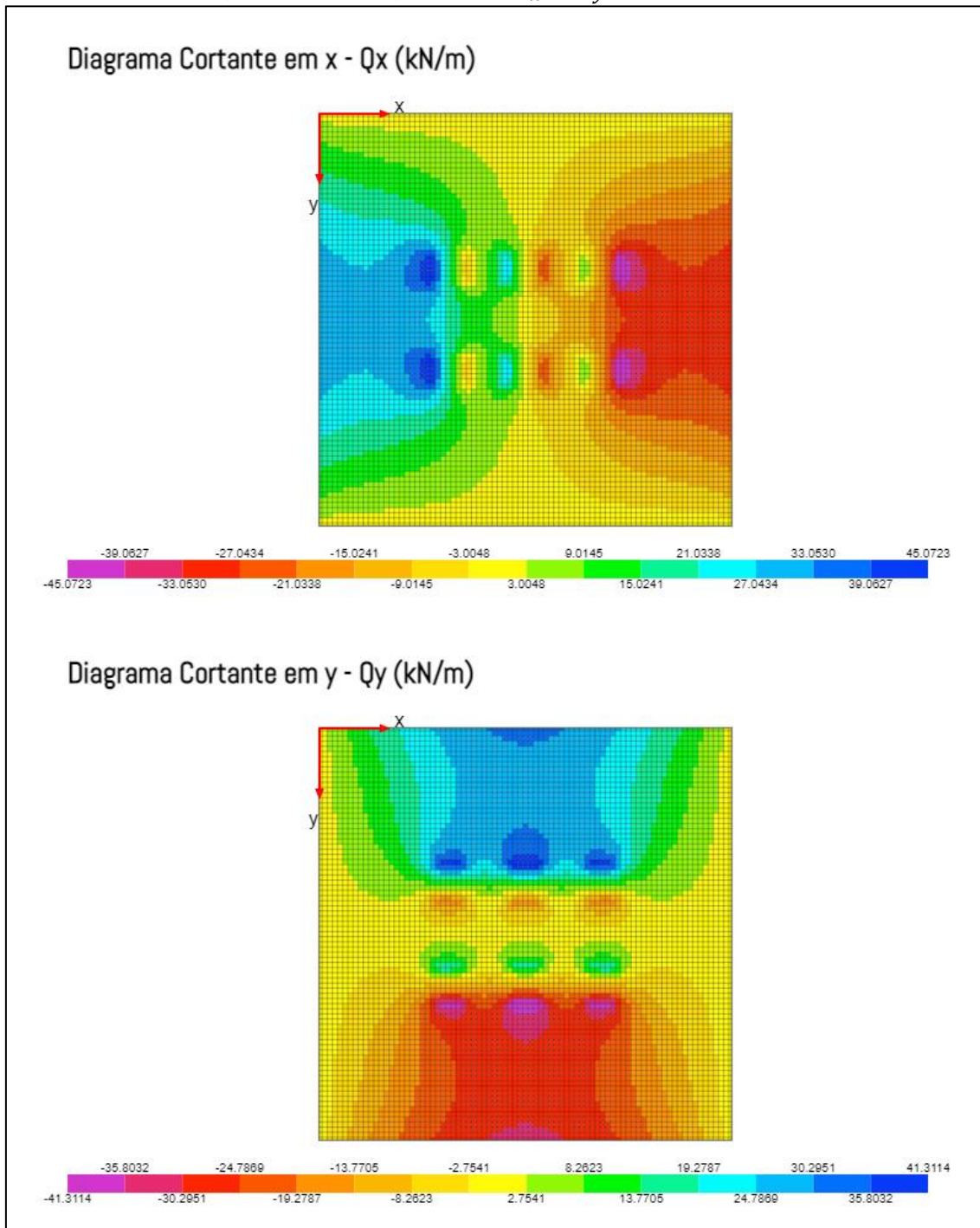
Figura 50 – Diagrama da  $Q_x$  e  $Q_y$  do Exemplo 2.

Figura 51 – Diagrama do momento em x e y do exemplo 2, gerado no RFEM 5.



Fonte: RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

### 4.5.3 Exemplo 3 – Carga pontual

Na Figura 52, apresentam-se os dados do Exemplo 3: uma laje quadriapoiada com dimensões de 2x4 (m) sujeita a uma carga pontual de 16 kN, posicionada no centro da laje.

Figura 52 – Dados do Exemplo 3.



Fonte: O próprio autor (2022).

Tais dados foram inseridos no IFESTRUT-LAJES e os parâmetros considerados foram: espaçamento entre os pontos igual a 0,01m, tolerância de 0% (para o algoritmo considerar apenas os valores finais de  $m, n$ ) e número final de  $m, n$  igual a 50.

Por meio da Tabela 10, nota-se a comparação entre os resultados obtidos pelo módulo do IFESTRUT-LAJES (Navier) com o software RFEM 5 (DLUBAL, 2022) que utiliza o MEF. Os diagramas gerados pelo módulo de Navier (aqui apresentado), podem ser observados nas Figuras 53, 54 e 55. Na Figura 56, a fim de comparação, tem-se o diagrama do deslocamento gerado no RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

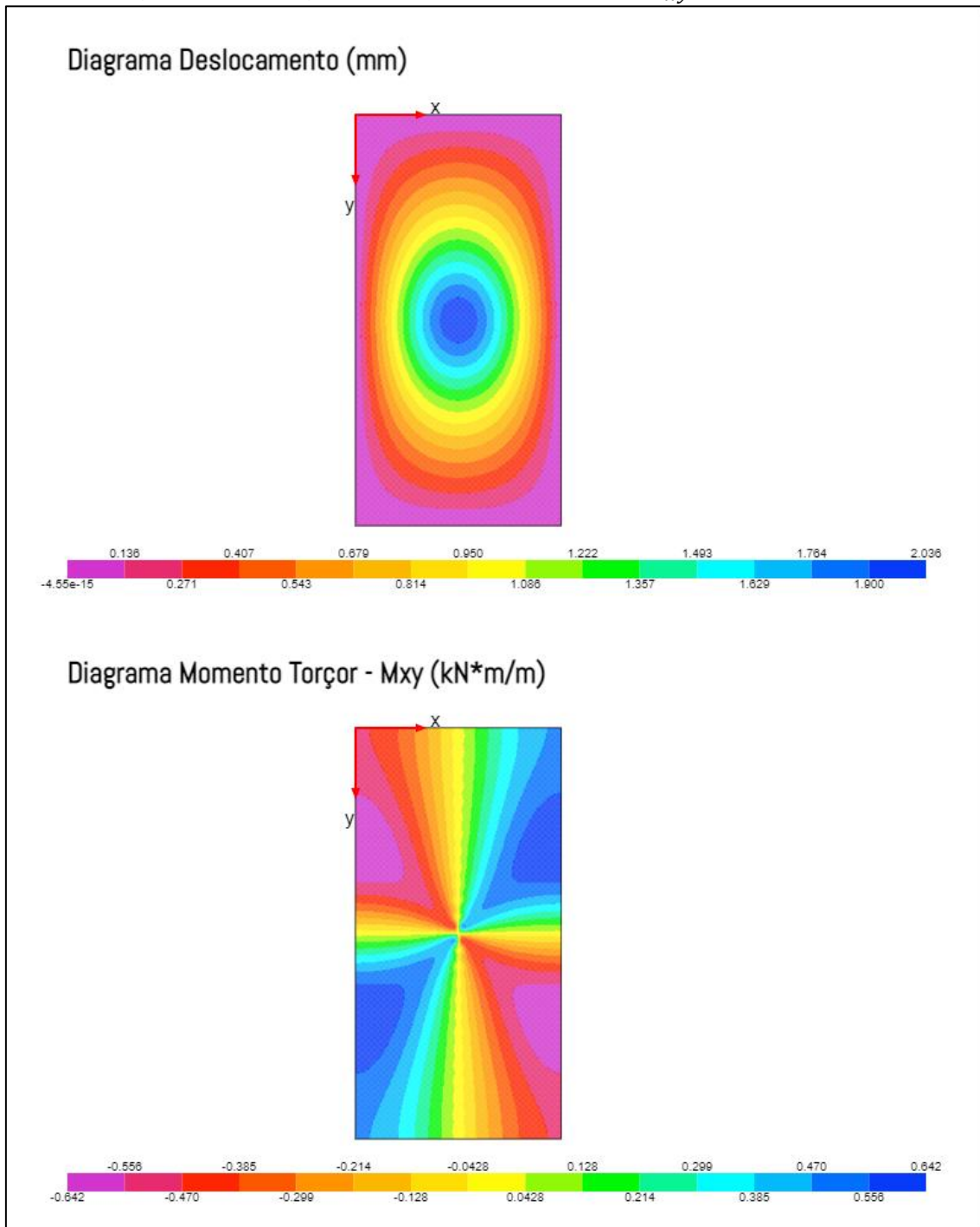
Figura 53 – Diagramas do deslocamento e  $M_{xy}$  do Exemplo 3.

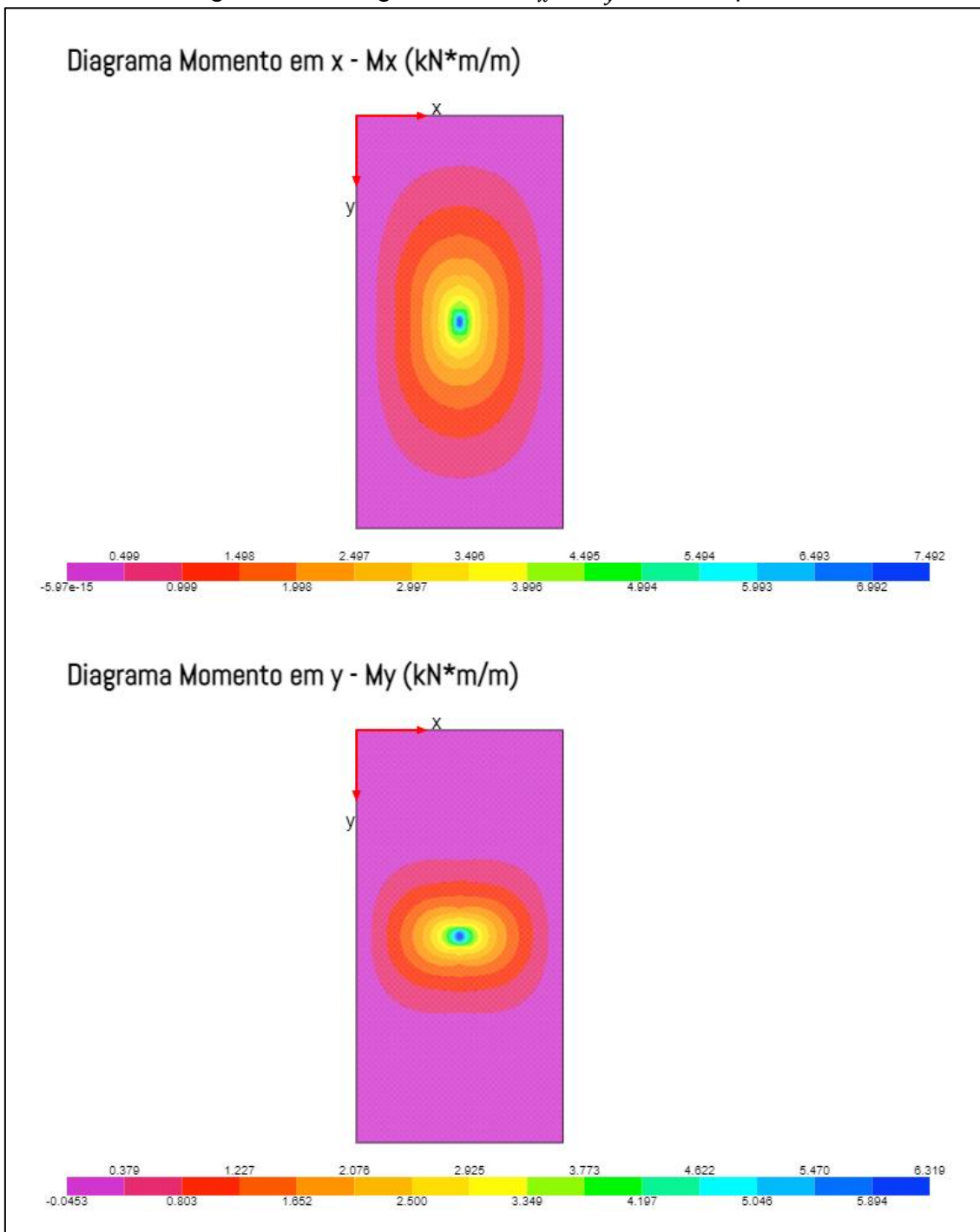
Figura 54 – Diagramas do  $M_x$  e  $M_y$  do Exemplo 3.

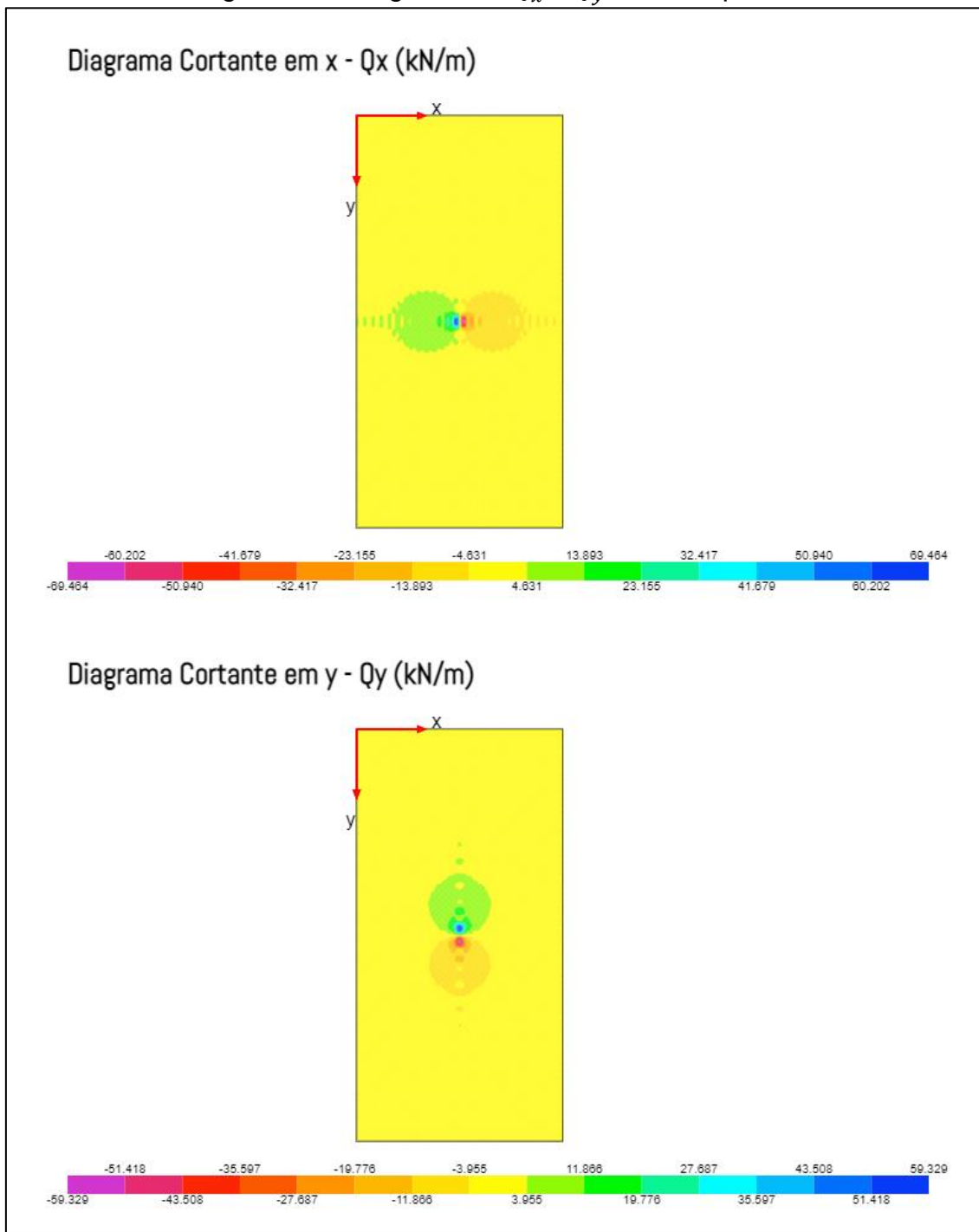
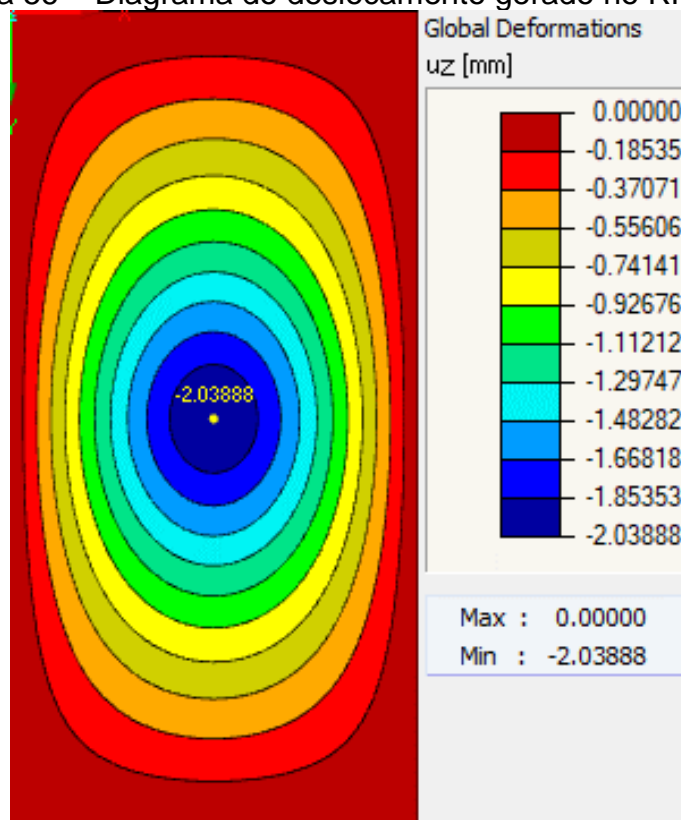
Figura 55 – Diagrama do  $Q_x$  e  $Q_y$  do Exemplo 3.



Figura 56 – Diagrama do deslocamento gerado no RFEM 5.



Fonte: RFEM 5 (DLUBAL, 2022).

Tabela 10 – Comparações do módulo (Navier) com RFEM 5 (MEF) ;  $m, n = 50$ .

Deslocamentos e esforços	RFEM 5 (MEF)			Navier			Diferença (%)
	x (m)	y (m)	Valor	x (m)	y (m)	Valor	
$w$ (mm)	1,00	2,00	2,03685	1,00	2,00	2,03586	0,04863
$M_x$ (kN * m/m)	1,00	2,00	7,26864	1,00	2,00	7,49160	2,97613
$M_y$ (kN * m/m)	1,00	2,00	5,70468	1,00	2,00	6,31852	9,71493
$M_{xy}$ (kN * m/m)	0,00	2,85	0,64199	0,00	2,83	0,64158	0,06390
	1,99	1,15	0,64200	2,00	1,17	0,64158	0,06546
$Q_x$ (kN/m)	0,95	2,00	61,5847	0,97	2,00	69,4643	11,34339
	1,05	2,00	61,5847	1,03	2,00	69,4643	11,34339
$Q_y$ (kN/m)	1,00	1,95	61,4848	1,00	1,94	59,3289	3,63372
	1,00	2,05	61,4848	1,00	2,06	59,3289	3,63372

Fonte: O próprio autor (2022).

Na Tabela 10, observa-se que as diferenças percentuais do deslocamento e o momento torçor são pequenas, entretanto, quanto aos momentos fletores e cortantes nas duas direções (x e y), as diferenças percentuais são maiores.

O motivo de tal discrepância, conforme Szilard (2004), se deve ao fato que a convergência na vizinhança da carga será lenta e no ponto de aplicação

da carga, onde ocorreram os máximos momentos fletores e cortantes neste exemplo, nunca será alcançada.

Mesmo que o número final de  $m, n$  seja aumentado, a diferença percentual não diminui. Na Tabela 11, observa-se que  $m, n$  foi definido como 75 e a diferença até aumentou para tais esforços.

Tabela 11 – Comparações do módulo (Navier) com RFEM 5 (MEF);  $m, n = 75$ .

Deslocamentos e esforços	RFEM 5 (MEF)			Navier			Diferença (%)
	x (m)	y (m)	Valor	x (m)	y (m)	Valor	
$M_x$ ( $kN * m/m$ )	1,00	2,00	7,26864	1,00	2,00	8,18455	11,19072
$M_y$ ( $kN * m/m$ )	1,00	2,00	5,70468	1,00	2,00	7,01149	18,63812
$Q_x$ ( $kN/m$ )	0,95	2,00	61,5847	0,97	2,00	93,7674	34,32184
	1,05	2,00	61,5847	1,03	2,00	93,7674	34,32184
$Q_y$ ( $kN/m$ )	1,00	1,95	61,4848	1	1,96	90,2713	31,88887
	1,00	2,05	61,4848	1	2,04	90,2713	31,88887

Fonte: O próprio autor (2022).

Na Tabela 12, a fim de comparação, se escolheu outro ponto (diferente do da aplicação da carga) para analisar as diferenças percentuais, mantendo  $m, n$  como 75 e analisando o ponto (0,8;1) m. As diferenças percentuais se apresentaram muito menores.

Tabela 12 – Análise comparativa entre o módulo e RFEM em outro ponto.

Deslocamentos e esforços	RFEM 5 (MEF)			Navier			Diferença (%)
	x (m)	y (m)	Valor	x (m)	y (m)	Valor	
$M_x$ ( $kN * m/m$ )	0,80	1,00	1,12265	0,80	1,00	1,12258	0,00624
$M_y$ ( $kN * m/m$ )	0,80	1,00	0,13868	0,80	1,00	0,13914	0,33060
$Q_x$ ( $kN/m$ )	0,80	1,00	0,54880	0,80	1,00	0,55207	0,59232
	0,80	3,00	0,54880	0,80	3,00	0,55207	0,59232
$Q_y$ ( $kN/m$ )	0,80	1,00	1,68797	0,80	1,00	1,65949	1,71619
	0,80	3,00	1,68797	0,80	3,00	1,65949	1,71619

Fonte: O próprio autor (2022).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As funções algébricas não encontradas explicitamente na bibliografia foram explicitadas e implementadas computacionalmente no módulo.

O algoritmo criado para plotagem dos diagramas se mostra eficaz não só por ser genérico (utilizado por todas as funções algébricas), mas também por permitir ao usuário fazer mudanças nos intervalos de cores.

O relatório elaborado computacionalmente segue a filosofia do grupo NEVE, contendo a explicação do método de Navier e todos os passos de resolução algébrica e numérica.

Tendo em vista os resultados obtidos, em geral satisfatórios, o módulo implementado no IFESTRUT-LAJES (NEV, 2020) comprova que a proposta inicial foi conquistada. Portanto, o *software* poderá auxiliar os usuários com a exibição dos cálculos, de modo que alunos poderão utilizá-lo como material de estudo, professores como elemento auxiliador na metodologia de ensino e profissionais na análise estrutural de lajes.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Cidade Nova - RS: Dunas, 2010. 395 p. v. 2. ISBN 978-85-86717-10-9.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas: ABNT, 2013.

AUTODESK. **Robot Structural Analysis Professional**. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.autodesk.com/products/robot-structural-analysis/overview?term=1-YEAR&tab=subscription>. Acesso em: 22 maio 2022.

AUTODESK. **Revit**: software BIM para projetistas, construtores e desenvolvedores. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.autodesk.com.br/products/revit/overview?term=1-YEAR&tab=subscription>. Acesso em: 22 maio 2022.

BASTOS, Paulo Sérgio. **Lajes de concreto armado**: 2117 - Estruturas de concreto I. Bauru - SP, 2021. Disponível em: <https://www.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Lajes.pdf>. Acesso em: 9 abr. 2022.

CAMACHO, Jefferson S. **Estudo das lajes**. Ilha Solteira - SP: [s. n.], 2004. Disponível em: <https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariacivil/nepae/estudo-das-lajes.pdf>. Acesso em: 19 maio 2022.

DIAS, Nickolas Leitão. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande, 2019. Disponível em: [https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2019-2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019-2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf). Acesso em: 09 mar. 2022.

DIEL, Ane Priscila. Tabela A.3.1 - Processo de Marcus. *In*: DIEL, Ane Priscila. **Análise comparativa de esforços e deslocamentos em lajes maciças de concreto armado através dos métodos de analogia de grelha e tabelas**. Orientador: Almir Barros da Silva Santos Neto. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria - RS, 2018. Disponível em: [http://coral.ufsm.br/engcivil/images/PDF/1\\_2018/TCC\\_ANE%20PRISCILA%20DIEL.pdf](http://coral.ufsm.br/engcivil/images/PDF/1_2018/TCC_ANE%20PRISCILA%20DIEL.pdf). Acesso em: 17 maio 2022.

DLUBAL (Alemanha). **RFEM 5**: Programa estrutural de MEF para uso profissional. 5.28.03. Tiefenbach, 2022. Disponível em: <https://www.dlubal.com/en/products/rfem-fea-software/what-is-rfem>. Acesso em: 22 maio 2022.

FERNANDES, Jonatan Vitor de Melo; NIRSCHL, Gustavo Cabrelli. **Base Cad-Lajes On-Line Para Programas de Engenharia Civil – Frente 1**. Orientador: Gustavo Cabrelli Nirschl. 2020. Relatório final (Iniciação científica) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Votuporanga - SP, 2020. Disponível em: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrut-desenv-lajes.html?>. Acesso em: 2 maio 2022.

FLATSCHART, Fábio. **HTML 5 - Embarque Imediato**. 1º. ed. Rio de Janeiro - RJ: Editora Brasport, 2011. 256 p. ISBN 9788574525778.

HABITISSIMO. **Execução da estrutura**. [S. /], [20??]. Disponível em: [https://fotos.habitissimo.com.br/foto/execucao-da-estrutura\\_3016711](https://fotos.habitissimo.com.br/foto/execucao-da-estrutura_3016711). Acesso em: 04 jun. 2022.

KHOURI, Gustavo Elias; SERAPIÃO, Mariana Silva; CARDOSO JUNIOR, Sander David. **T-Rüsch**: Aplicativo para o cálculo de esforços em lajes de pontes pelo método de Rüsch. 1.0. [S. /], [20??]. Disponível em: <https://www.tqs.com.br/apps/t-rusch/a6q52fh86z> Acesso em: 05 jun. 2022.

LEMAY, Laura. **Aprenda a Criar Páginas Web com HTML e XHTML em 21 dias**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/259>. Acesso em: 20 mar. 2022.

MICROSOFT (ed.). **Visual Studio Code**. 1.65. [S. /], 2022. Disponível em: <https://code.visualstudio.com/>. Acesso em: 26 mar. 2022.

MONTE, Limon. **SweetAlert2**: a beautiful, responsive, customizable, accessible (wai-aria) replacement for javascript's popup boxes. Versão 9.13.0. [S. /], 21 maio 2020. Disponível em: <https://sweetalert2.github.io/>. Acesso em: 24 mar. 2022.

MOZILLA. **MDN web docs**: Basic usage of canvas. [S. /], 2022. Disponível em: [https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Canvas\\_API/Tutorial/Basic\\_usage](https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Canvas_API/Tutorial/Basic_usage). Acesso em: 22 maio 2022.

NEV. **IFESTRUT-LAJES**. Votuporanga - SP, 2020. Disponível em: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/lfestrut-lajes.html>. Acesso em: 20 maio 2022.

PAMPUCH, Bartek; M., Libor. **PDFMake**: Client/server side PDF printing in pure JavaScript. Versão 0.1.6.8. [S. /], 10 nov. 2020. Disponível em: <http://www.pdfmake.org>. Acesso em: 24 mar. 2022.

PTC. **MathCad Prime 7**. [S. /], 2021. Disponível em: <https://www.mathcad.com/pt>. Acesso em: 09 abr. 2022.

RÜSCH, Hubert. **Berechnungstafeln für rechtwinklige Fahrbahnplatten von Straßenbrücken**. Berlin: Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1965.

SEGURADO, Valquiria Santos (org.). **Projeto de interface com o usuário**. 1°. ed. São Paulo: Editora Pearson, 2017. 195 p. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/124143>. Acesso em: 20 mar. 2022.

SILVA, Guilherme dos Santos; NIRSCHL, Gustavo Cabrelli. **Base Cad-Lajes On-Line Para Programas De Engenharia Civil – Frente 2**. Orientador: Gustavo Cabrelli Nirschl. 2020. Relatório final (Iniciação científica) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Votuporanga - SP, 2020. Disponível em: <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut-lajes/ifestrut-desenv-lajes.html?>. Acesso em: 2 maio 2022.

SOARES, Adilson Moreira. **Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 2004. Disponível em: <http://docplayer.com.br/82668953-Universidade-federal-de-itajuba.html>. Acesso em: 21 mar. 2022.

SOUSA, Roque Fernando Marcos. **CANVAS HTML 5: Composição gráfica e interatividade na web**. 1°. ed. Rio de Janeiro - RJ: Editora Brasport, 2018. ISBN 9788574527000. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/160686#>. Acesso em: 21 mar. 2022.

SZILARD, Rudolph. **Theories and Applications of Plate Analysis: classical, numerical and engineering methods**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, Stephen. **History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. Nova York: McGraw-Hill, 1953. Reimpressão, Nova York: Dover, 1983.

VENTSEL, Eduard; KRAUTHAMMER, Theodor. **Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications**. [S. l.]: CRC Press, 2001. 682 p. ISBN 0-8247-0575-0.

## APÊNDICE A – PARTE DO CÓDIGO JAVASCRIPT PARA ELABORAÇÃO DO RELATÓRIO

Nas Figuras 57 e 58, tem-se parte do código *JavaScript* que faz a captação dos dados de entrada do usuário e incorpora no *array content* do objeto *docDefinition*, o qual é o utilizado pelo *PDFMake* (PAMPUCH; M., 2020) para montagem do arquivo PDF.

Figura 57 – Código que gera a tabela dos dados dos apoios do relatório.

```
1 // APOIOS
2   for (let index = 0; index < 3; index++) {
3     array = index == 0 ? apoiada : index == 1 ? livre
4     : index == 2 ? engaste : null;
5     nomeApoio = index == 0 ? 'Apoiada' : index == 1 ?
6     'Livre' : index == 2 ? 'Engaste' : null;
7     for (let index = 0; index < array.length; index++
8     ) {
9       dadosApoios.push({ 'Tipo de apoio': String(no
10      meApoio), 'Índice': String(index), 'Lado': String(array[i
11      ndex].lado) });
12     }
13   }
14   docDefinition.content.push({
15     text: ['\n\n\n\n\n',
16     { text: 'APOIOS', pageBreak: 'after', style:
17     'titulo2', }, '\n',
18     ],
19   });
20   docDefinition.content.push(table(dadosApoios, ['Tipo
21   de apoio',
22   'Índice', 'Lado'], 'apoios'));
23 // FIM APOIOS
```

Fonte: O próprio autor (2022).

Figura 58 – Código que gera a tabela dos dados das cargas pontuais.

```

1  //PONTUAL
2      if (cargapontual.length>=1){
3          for (let index = 0; index < cargapontual.length;
index++) {
4              dadosCargapt.push({ 'Índice': String(index+1
), 'x (m)': String(precisaomelhor(cargapontual[index].xre
l)), 'y (m)': String(precisaomelhor(cargapontual[index].y
rel)), 'Módulo (kN)': String(precisaomelhor(cargapontual[
index].modulo * transforca(cargapontual[index].unidade))
});
5          }
6          docDefinition.content.push({
7              text: [
8                  '\n',
9                  { text: 'CARGA PONTUAL', style:'titulo2'
},
10             ],
11         });
12         docDefinition.content.push(table(dadosCargapt, ['
Índice', 'x (m)', 'y (m)', 'Módulo (kN)'],'cp'));
13     }
14     //FIM PONTUAL

```

Fonte: O próprio autor (2022).

Na Figura 59, nota-se parte do código *JavaScript* que pega os resultados obtidos e os arranja de modo a montar um *array* chamado *tabelaResumo* que será incorporada no *array content* do objeto *docDefinition*.



Figura 59 – Código que gera a tabela resumo do relatório.

```

1 //TABELA RESUMO
2     docDefinition.content.push(
3         {
4             text:[
5                 { text: '\nRESUMO DOS VALORES DE DESLOCAM
6 ENTO E ESFORÇOS', style: 'titulo2' }, '\n',
7                 { text: '\nNa ', style: 'texts'},
8                 { text: 'Tabela ' + (numTable+1), linkToDe
9 stination: 'Tabela ' + (numTable + 1), style: 'texts'},
10                { text: ', pode ser visualizados o resumo
11 do valor de deslocamento e esforços internos para o ponto
12 analisado.\n\n' , style:'texts'},
13            ]
14        }
15    );
16    tabelaResumo = []
17    tabelaResumo.push({ 'x (m)': String(precisaomelhor
18 r(coordXPDF)),
19 'y (m)': String(precisaomelhor(coordYPDF)),
20 'w (mm)': String(precisaomelhor(valuefn[0]*1000
21 )),
22 'Mx(kN*m/m)': String(precisaomelhor(valuefn[1])),
23 'My (kN*m/m)': String(precisaomelhor(valuefn[2
24 ])),
25 'Mxy(kN*m/m)': String(precisaomelhor(valuefn[3
26 ])),
27 'Qx (kN/m)': String(precisaomelhor(valuefn[4])),
28 'Qy (kN/m)': String(precisaomelhor(valuefn[5])),
29 });
30    docDefinition.content.push(table(tabelaResumo, [ '
31 x (m)', 'y (m)', 'w (mm)', 'Mx(kN*m/m)', 'My (kN*m/m)', 'Mxy(k
32 N*m/m)', 'Qx (kN/m)', 'Qy (kN/m)'], 'Resumo do Deslocamento
33 e Esforços'));
34

```

Fonte: O próprio autor (2022).

## APÊNDICE B – RELATÓRIO DO EXEMPLO 1 do item 4.5

O relatório do Exemplo 1 do item 4.5 pode ser visualizado na Figura 60, com os parâmetros de cálculo: espaçamento entre os pontos de 0,01m;  $m, n = 15$  e tolerância de 0,01%; ponto analisado = (1,2) m.

Figura 60 – Relatório detalhado do Exemplo 1 descrito no item 4.5.

TO TRANSLATE THIS DOCUMENT, DOWNLOAD THE PDF REPORT AND TRANSLATE ON <https://www.onlinedoctranslator.com/pt/> (FREE - GENERATE COMPLETE PDF TRANSLATED FILE) OR TRANSLATE ON <https://translate.google.com/> (SELECT DOCUMENTS - FREE - BUT ONLY TRANSLATE TEXT)



**INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
SÃO PAULO  
Campus Votuporanga**

**Núcleo de Engenharia Virtual (NEV)**

**Relatório detalhado - Método Navier**

**Autor:** Guilherme dos Santos Silva  
**Orientador:** Prof. Gustavo Cabrelli Nirschl  
**Tipo:** PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DO IFSP (PIBIFSP)  
**Curso:** Engenharia Civil

**DATAS:**  
**Versão original:** 01/04/2020  
**Última atualização:** 30/05/2022  
**Geração do relatório:** 24/09/2022

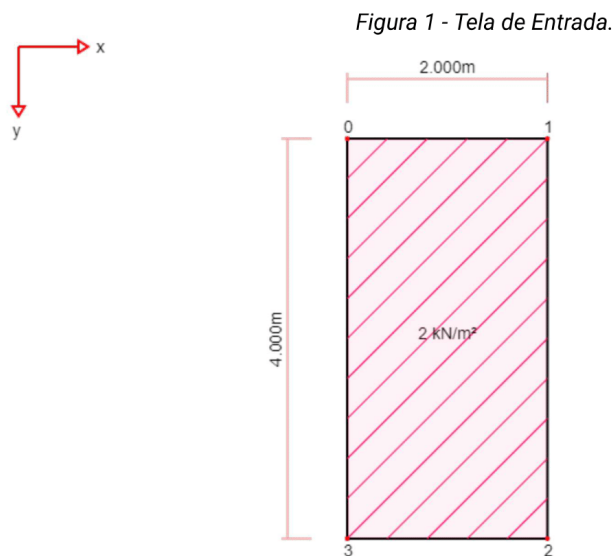
1 de 25

## DADOS DE ENTRADA

### OBSERVAÇÕES GERAIS:

- Os índices são ordenados de acordo com a inserção dos elementos;
- Todas as coordenadas "x,y" são em relação ao vértice 0 da laje, sendo as orientações dos eixos observadas no canto superior esquerdo da Figura 1;
- As resoluções de equações consideraram todas as casas decimais de suas variáveis. Entretanto, nas tabelas os valores serão mostrados com a quantidade de algarismos significativos escolhida (3).

Na Figura 1 podem ser vistos todos os elementos inseridos na laje.



A partir daqui, o relatório utilizará o sistema kN-m, mostrando os valores convertidos em relação aos dados de entrada do usuário.

### LAJE

Tabela 1 - Propriedades da Laje.

Módulo de elasticidade(E) (kN/m <sup>2</sup> )	Espessura da laje(h) (m)	Coefficiente de Poisson(v)
210000000.000	0.0300	0.300

## VÍNCULOS

Tabela 2 - Dados dos apoios.

Tipo de vínculo	Índice	Lado
Apoio	0	0-1
Apoio	1	1-2
Apoio	2	2-3
Apoio	3	3-0

## CARGA SOBRE TODA LAJE

Por meio da Tabela 3 podem ser observados os dados da Carga Sobre Toda Laje.

Tabela 3 - Dados da Cargas Sobre Toda Laje.

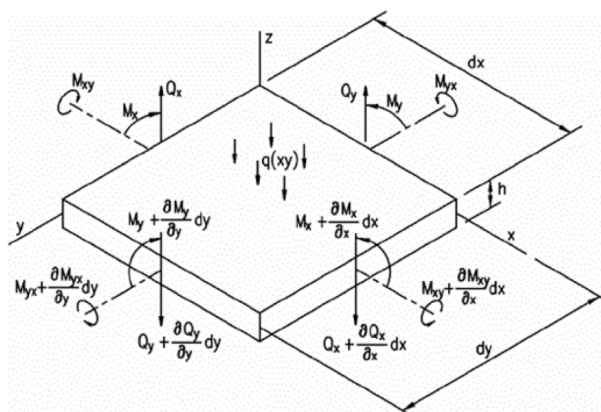
Índice	Módulo (kN/m <sup>2</sup> )
0	2.000

## INTRODUÇÃO TEÓRICA - MÉTODO DE NAVIER

O Método de Navier consiste em determinar uma solução algébrica para a Equação de Lagrange, uma equação diferencial que estabelece o comportamento físico de uma placa, desde que se tenha as condições de contorno (DIAS, 2019). Para lajes com espessuras muito menores do que as outras dimensões pode-se, conforme Szilard (2004), considerá-las em um sistema de coordenadas (x,y).

Com as Teorias da Elasticidade e de Kirchhoff, o equilíbrio de um elemento infinitesimal conforme, na Figura 2, resulta nas seguintes relações diferenciais de esforços internos: momentos fletores (1) e (2); momento torçor (3); forças de cisalhamento transversais (4) e (5) (SZILARD, 2004).

Figura 2 - Equilíbrio de possíveis ações



Fonte: Soares, 2014.

Vale ressaltar que a Teoria de Kirchhoff estabelece algumas hipóteses, como:

- Material da placa é homogêneo, isotrópico e obedece à lei de Hooke;
- Os deslocamentos transversais são pequenos comparados com a espessura da placa;
- As tensões na direção  $z$  são desprezíveis;
- A seção plana e perpendicular à superfície média, permanece plana e perpendicular à superfície média após a flexão.

Dessa forma com as relações de (1) a (5), classicamente se desenvolve a Equação de Lagrange, mostrada, por exemplo, em Dias (2019), em coordenadas cartesianas (6).

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (3)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (6)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (7)$$

Navier em 1820 apresenta a solução para Equação de Lagrange (8), conforme Timoshenko (1953, p. 121), no intuito de obter a deflexão de placas retangulares simplesmente apoiadas (condição de contorno) e similarmente a (9) para a carga sobre a laje. Ambas as funções são séries duplas trigonométricas e obedecem às condições de contorno, deslocamentos e momentos fletores nulos nos bordos, de modo que os senos são nulos quando  $x$  ou  $y$  assumem o valor 0 (vértice superior esquerdo) ou respectivamente, "a" (dimensão da laje paralela a  $x$ ) e "b" (dimensão da laje paralela a  $y$ ) (SZILARD, 2004).

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (8)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

Substituindo (9) e (8) em (6) temos:

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (10)$$

Com isso, (10) em (8) obtém-se a função de deflexão genérica para lajes retangulares simplesmente apoiadas:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (11)$$

Onde  $p_{mn}$  é o coeficiente da carga:

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (12)$$

Em que:

$w$  → função do deslocamento transversal da placa;

$D$  → rigidez da placa, equação (7);

$E$  → módulo de elasticidade;

$t$  → espessura da placa;

$\nu$  → coeficiente de Poisson;

$p(x, y)$  → função da carga sobre a placa;

$m, n$  → números inteiros.

### RESOLUÇÃO ALGÉBRICA

Para uma laje simplesmente apoiada tem-se a função do deslocamento genérica (11) e o coeficiente de carga genérica (12).

#### FUNÇÕES REFERENTES A CARGA DISTRIBUÍDA UNIFORMEMENTE SOBRE TODA LAJE

Como a laje está sujeita a uma carga  $q_0$  uniformemente distribuída (constante sobre toda laje), ela não depende de  $x$  e  $y$ :

$$p(x, y) = q_0 \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12), conseguimos o coeficiente ( $p_{mn}$ ) para tal carga:

$$p_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (11), obtemos a função algébrica do deslocamento de uma laje simplesmente apoiada sujeita a uma carga distribuída uniformemente:

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (15)$$

Tendo a função do deslocamento, conseguimos as funções dos esforços internos por meio das relações de (1) a (5).

Substituindo (15) em (1) e desenvolvendo, obtemos a função algébrica do momento fletor na direção  $x$  para tal carga (16). Analogamente, conquistamos a função algébrica do momento

fletor na direção y (17), a do momento torçor (18), a da cortante na direção x (19), a da cortante na direção y (20). Observe que para tais funções, devido a carga uniformemente distribuída sobre toda laje, os valores de m e n variam nos números ímpares.

$$M_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]}{mn \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (16)$$

$$M_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \left[ \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \nu \left(\frac{m}{a}\right)^2 \right]}{mn \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (17)$$

$$M_{xy}(x, y) = -\frac{16q_o(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{\left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \quad (18)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 a} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{n \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]} \quad (19)$$

$$Q_y(x, y) = \frac{16q_o}{\pi^3 b} \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]} \quad (20)$$

## RESULTADOS

### OPÇÕES DOS DIAGRAMAS/FUNÇÕES

Os critérios de parada das funções algébricas utilizados pelo software são:

- O número máximo de m e n(15);
- A diferença percentual entre termos(0.01%).

A diferença percentual é verificada sempre que "m" varia, já que foi observado que nas funções de Navier as diferenças percentuais nem sempre diminuem conforme m,n variam, quando "m" varia a diferença percentual aumenta.

Caso o software, a medida que m varia, encontre a tolerância adotada ele para o somatório.

O valor do espaçamento entre os pontos (0.01 m) também define o quadrado de influência de cada ponto, ou seja, caso o espaçamento entre os pontos fosse 1 m cada ponto seria representado por um quadrado de dimensões de 1x1 m.

### RESOLUÇÃO NÚMÉRICA DO PONTO ESCOLHIDO

A coordenada escolhida, pelo usuário, do ponto a ser analisado é: (1,2)m.

**Observações:**

- Nas funções das cargas sobre região e pontual, o duplo somatório contém características da carga, por exemplo, suas dimensões e posição. Na resolução, afim de simplificar e padronizar, o módulo que também é uma característica da carga, multiplicará o valor de cada termo do somatório;
- Vale ressaltar que nas tabelas os resultados são mostrados de acordo com a quantidade de algarismos significativos escolhido (3), entretanto, os cálculos internos utilizam todas casas decimais possíveis;
- Considere  $\Sigma\Sigma u$  como sendo a notação referente ao duplo somatório presente nas funções e "u" sua respectiva expressão.

No Apêndice A, pode ser observado como resolver um duplo somatório.

### DESLOCAMENTO - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE

O deslocamento gerado pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (15). Por meio da Tabela 4 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

Tabela 4 - Resolução do Duplo Somatório da Função do Deslocamento.

m	n	$q_0 \cdot u$	$\Sigma\Sigma q_0 \cdot u$ (kN*m <sup>2</sup> )	Diferença Percentual (%)
1	1	20.480	20.480	-
1	3	-1.010	19.470	4.931
1	5	0.122	19.592	0.625
1	7	-0.0260	19.566	0.133
1	9	0.00787	19.574	0.0402
1	11	-0.00298	19.571	0.0152
1	13	0.00132	19.572	0.00672
1	15	-0.000651	19.571	0.00333
3	1	-0.125	19.447	0.637
3	3	0.0281	19.475	0.144
3	5	-0.00917	19.466	0.0471
3	7	0.00337	19.469	0.0173
3	9	-0.00139	19.468	0.00712
3	11	0.000629	19.468	0.00323
3	13	-0.000312	19.468	0.00160
3	15	0.000167	19.468	0.000858
5	1	0.0100	19.478	0.0516
5	3	-0.00287	19.475	0.0147
5	5	0.00131	19.477	0.00673
5	7	-0.000659	19.476	0.00338
5	9	0.000347	19.476	0.00178
5	11	-0.000191	19.476	0.000979



m	n	qo*u	ΣΣqo*u (kN*m <sup>2</sup> )	Diferença Percentual (%)
5	13	0.000109	19.476	0.000559
5	15	-0.0000646	19.476	0.000332
7	1	-0.00188	19.474	0.00968

Conforme visualizado na Tabela 4 o somatório foi parado pelo critério da diferença percentual.

**Cálculo das constantes de (15):**

O valor de D é conseguido por meio de (7):

$$D = (210000000 * (0.03^3)) / (12 * (1 - 0.3^2)) = 519.231 \text{ [kN*m]}$$

Constante da função:

$$(16) / ((\pi^6) * D) = (16) / ((\pi^6) * 519.231) = 0.0000321 \text{ [1/(kN*m)]}$$

$$\Sigma\Sigma qo*u \text{ (conforme visualizado na Tabela)} = 19.476 \text{ [kN*m}^2\text{]}$$

**Valor de w(1,2):**

$$w(1,2) = 0.0000321 * 19.476 = 0.000624 \text{ m}$$

### MOMENTO FLETOR NA DIREÇÃO X - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE

O momento fletor na direção x gerado pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (16). Por meio da Tabela 5 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

*Tabela 5 - Resolução do Duplo Somatório da Função do Momento na Direção x.*

m	n	qo*u	ΣΣqo*u (kN*m/m)	Diferença Percentual (%)
1	1	5.504	5.504	-
1	3	-0.423	5.081	7.683
1	5	0.0875	5.169	1.722
1	7	-0.0304	5.138	0.589
1	9	0.0139	5.152	0.271
1	11	-0.00750	5.145	0.146
1	13	0.00450	5.149	0.0874
1	15	-0.00291	5.146	0.0565
3	1	-0.283	4.863	5.496
3	3	0.0680	4.931	1.397
3	5	-0.0249	4.906	0.506
3	7	0.0107	4.917	0.218
3	9	-0.00522	4.912	0.106
3	11	0.00284	4.915	0.0579

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m/m)	Diferença Percentual (%)
3	13	-0.00169	4.913	0.0344
3	15	0.00108	4.914	0.0220
5	1	0.0629	4.977	1.281
5	3	-0.0184	4.959	0.371
5	5	0.00881	4.967	0.178
5	7	-0.00472	4.963	0.0951
5	9	0.00270	4.965	0.0544
5	11	-0.00162	4.964	0.0327
5	13	0.00103	4.965	0.0207
5	15	-0.000677	4.964	0.0136
7	1	-0.0231	4.941	0.466
7	3	0.00720	4.948	0.146
7	5	-0.00381	4.944	0.0770
7	7	0.00229	4.947	0.0464
7	9	-0.00146	4.945	0.0295
7	11	0.000961	4.946	0.0194
7	13	-0.000651	4.946	0.0132
7	15	0.000453	4.946	0.00916
9	1	0.0109	4.957	0.221
9	3	-0.00349	4.953	0.0704
9	5	0.00194	4.955	0.0391
9	7	-0.00124	4.954	0.0250
9	9	0.000839	4.955	0.0169
9	11	-0.000588	4.954	0.0119
9	13	0.000422	4.955	0.00851
9	15	-0.000308	4.954	0.00621
11	1	-0.00599	4.948	0.121
11	3	0.00194	4.950	0.0392
11	5	-0.00110	4.949	0.0223
11	7	0.000730	4.950	0.0147
11	9	-0.000515	4.950	0.0104
11	11	0.000376	4.950	0.00760
11	13	-0.000281	4.950	0.00567
11	15	0.000213	4.950	0.00430
13	1	0.00363	4.953	0.0734

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m/m)	Diferença Percentual (%)
13	3	-0.00119	4.952	0.0240
13	5	0.000685	4.953	0.0138
13	7	-0.000462	4.952	0.00933
13	9	0.000334	4.953	0.00675
13	11	-0.000251	4.953	0.00507
13	13	0.000193	4.953	0.00389
13	15	-0.000150	4.953	0.00303
15	1	-0.00237	4.950	0.0478
15	3	0.000777	4.951	0.0157
15	5	-0.000453	4.951	0.00914
15	7	0.000310	4.951	0.00625
15	9	-0.000228	4.951	0.00460
15	11	0.000174	4.951	0.00352
15	13	-0.000137	4.951	0.00276
15	15	0.000109	4.951	0.00220

Conforme visualizado na Tabela 5 o somatório foi parado pelo critério dos números finais de m,n.

**Cálculo das constantes de (16):**

Constante da função:

$$(16)/(\pi^4) = 0.164$$

$\Sigma\Sigma qo*u$  (conforme visualizado na Tabela) = 4.951 [kN\*m/m]

Valor de  $m_x(1,2)$ :

$$m_x(1,2) = 0.164 * 4.951 = 0.813 \text{ kN*m/m}$$

### MOMENTO FLETOR NA DIREÇÃO Y - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE

O momento fletor na direção y gerado pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (17). Por meio da Tabela 6 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

*Tabela 6 - Resolução do Duplo Somatório da Função do Momento na Direção y.*

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m/m)	Diferença Percentual (%)
1	1	2.816	2.816	-
1	3	-0.644	2.172	22.862
1	5	0.199	2.372	9.179

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m/m)	Diferença Percentual (%)
1	7	-0.0817	2.290	3.445
1	9	0.0405	2.330	1.767
1	11	-0.0228	2.308	0.976
1	13	0.0140	2.322	0.607
1	15	-0.00920	2.312	0.396
3	1	-0.0919	2.220	3.976
3	3	0.0348	2.255	1.566
3	5	-0.0205	2.235	0.910
3	7	0.0126	2.247	0.564
3	9	-0.00795	2.239	0.354
3	11	0.00519	2.245	0.232
3	13	-0.00351	2.241	0.156
3	15	0.00246	2.243	0.110
5	1	0.0194	2.263	0.867
5	3	-0.00700	2.256	0.309
5	5	0.00451	2.260	0.200
5	7	-0.00325	2.257	0.144
5	9	0.00241	2.260	0.107
5	11	-0.00180	2.258	0.0796
5	13	0.00135	2.259	0.0600
5	15	-0.00103	2.258	0.0456
7	1	-0.00704	2.251	0.312
7	3	0.00246	2.254	0.109
7	5	-0.00157	2.252	0.0696
7	7	0.00117	2.253	0.0521
7	9	-0.000925	2.252	0.0411
7	11	0.000744	2.253	0.0330
7	13	-0.000601	2.252	0.0267
7	15	0.000488	2.253	0.0217
9	1	0.00331	2.256	0.147
9	3	-0.00114	2.255	0.0503
9	5	0.000713	2.256	0.0316
9	7	-0.000534	2.255	0.0237
9	9	0.000429	2.256	0.0190
9	11	-0.000356	2.255	0.0158

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m/m)	Diferença Percentual (%)
9	13	0.000300	2.256	0.0133
9	15	-0.000253	2.255	0.0112
11	1	-0.00181	2.254	0.0802
11	3	0.000615	2.254	0.0273
11	5	-0.000382	2.254	0.0170
11	7	0.000284	2.254	0.0126
11	9	-0.000229	2.254	0.0102
11	11	0.000192	2.254	0.00853
11	13	-0.000165	2.254	0.00732
11	15	0.000143	2.254	0.00634
13	1	0.00109	2.255	0.0486
13	3	-0.000370	2.255	0.0164
13	5	0.000228	2.255	0.0101
13	7	-0.000168	2.255	0.00747
13	9	0.000135	2.255	0.00601
13	11	-0.000114	2.255	0.00506
13	13	0.0000986	2.255	0.00437
13	15	-0.0000865	2.255	0.00384
15	1	-0.000712	2.254	0.0316
15	3	0.000240	2.254	0.0107
15	5	-0.000147	2.254	0.00653
15	7	0.000108	2.254	0.00479
15	9	-0.0000865	2.254	0.00384
15	11	0.0000727	2.254	0.00323
15	13	-0.0000630	2.254	0.00280
15	15	0.0000556	2.254	0.00247

Conforme visualizado na Tabela 6 o somatório foi parado pelo critério dos números finais de m,n.

**Cálculo das constantes de (17):**

Constante da função:  
 $(16)/(\pi^4) = 0.164$

$\Sigma\Sigma qo*u$  (conforme visualizado na Tabela) = 2.254 [kN\*m/m]

**Valor de  $m_y(1,2)$ :**  
 $m_y(1,2) = 0.164*2.254 = 0.370$  kN\*m/m

### MOMENTO TORÇOR - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE

O momento torçor gerado pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (18). Por meio da Tabela 7 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

Tabela 7 - Resolução do Duplo Somatório da Função do Momento Torçor.

m	n	$qo*u$	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m <sup>2</sup> )	Diferença Percentual (%)
1	1	7.68e-32	7.68e-32	-
1	3	-3.41e-32	4.27e-32	44.379
1	5	1.14e-32	5.41e-32	26.722
1	7	-4.78e-33	4.93e-32	8.839
1	9	2.39e-33	5.17e-32	4.847
1	11	-4.92e-33	4.68e-32	9.502
1	13	-1.03e-33	4.58e-32	2.194
1	15	-1.61e-33	4.42e-32	3.519
3	1	-4.21e-33	4.00e-32	9.522
3	3	8.53e-33	4.85e-32	21.346
3	5	-7.74e-33	4.08e-32	15.955
3	7	5.58e-33	4.63e-32	13.688
3	9	-3.79e-33	4.26e-32	8.170
3	11	9.35e-33	5.19e-32	21.966
3	13	2.19e-33	5.41e-32	4.227
3	15	3.72e-33	5.78e-32	6.878
5	1	9.41e-34	5.88e-32	1.627
5	3	-2.42e-33	5.63e-32	4.125
5	5	3.07e-33	5.94e-32	5.452
5	7	-3.03e-33	5.64e-32	5.094
5	9	2.64e-33	5.90e-32	4.677
5	11	-7.86e-33	5.12e-32	13.323
5	13	-2.12e-33	4.90e-32	4.151
5	15	-4.00e-33	4.50e-32	8.156
7	1	-3.46e-34	4.47e-32	0.769
7	3	9.59e-34	4.56e-32	2.147
7	5	-1.38e-33	4.43e-32	3.014
7	7	1.57e-33	4.58e-32	3.540
7	9	-1.58e-33	4.43e-32	3.439
7	11	5.35e-33	4.96e-32	12.088

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN*m <sup>2</sup> )	Diferença Percentual (%)
7	13	1.61e-33	5.12e-32	3.255
7	15	3.34e-33	5.46e-32	6.514
9	1	1.64e-34	5.47e-32	0.300
9	3	-4.67e-34	5.43e-32	0.854
9	5	7.09e-34	5.50e-32	1.307
9	7	-8.69e-34	5.41e-32	1.581
9	9	9.48e-34	5.50e-32	1.752
9	11	-3.49e-33	5.16e-32	6.341
9	13	-1.14e-33	5.04e-32	2.207
9	15	-2.52e-33	4.79e-32	5.004
11	1	-3.27e-34	4.76e-32	0.682
11	3	9.48e-34	4.85e-32	1.993
11	5	-1.48e-33	4.70e-32	3.055
11	7	1.89e-33	4.89e-32	4.024
11	9	-2.17e-33	4.68e-32	4.426
11	11	8.40e-33	5.52e-32	17.954
11	13	2.88e-33	5.80e-32	5.228
11	15	6.72e-33	6.48e-32	11.586
13	1	-6.71e-35	6.47e-32	0.104
13	3	1.97e-34	6.49e-32	0.304
13	5	-3.13e-34	6.46e-32	0.482
13	7	4.09e-34	6.50e-32	0.634
13	9	-4.83e-34	6.45e-32	0.743
13	11	1.94e-33	6.64e-32	3.001
13	13	6.89e-34	6.71e-32	1.037
13	15	1.67e-33	6.88e-32	2.482
15	1	-1.04e-34	6.87e-32	0.151
15	3	3.07e-34	6.90e-32	0.447
15	5	-4.94e-34	6.85e-32	0.715
15	7	6.57e-34	6.92e-32	0.959
15	9	-7.90e-34	6.84e-32	1.142
15	11	3.24e-33	7.16e-32	4.742
15	13	1.18e-33	7.28e-32	1.653
15	15	2.94e-33	7.57e-32	4.035

Conforme visualizado na Tabela 7 o somatório foi parado pelo critério dos números finais de

m,n.

**Cálculo das constantes de (18):**

Constante da função:

$$-(16*(1-\nu))/((\pi^4)*(a*b)) = -0.0144 [1/m^2]$$

$$\Sigma \Sigma q_0 * u \text{ (conforme visualizado na Tabela) } = 7.57e-32 [kN*m^2]$$

Valor de  $m_{xy}(1,2)$ :

$$m_{xy}(1,2) = -0.0144 * 7.57e-32 = -1.09e-33 \text{ kN*m/m}$$

### **CORTANTE NA DIREÇÃO X - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE**

A cortante na direção x gerada pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (19). Por meio da Tabela 8 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

*Tabela 8 - Resolução do Duplo Somatório da Função da Cortante na Direção x.*

<b>m</b>	<b>n</b>	<b><math>q_0 * u</math></b>	<b><math>\Sigma \Sigma q_0 * u</math> (kN)</b>	<b>Diferença Percentual (%)</b>
1	1	3.92e-16	3.92e-16	-
1	3	-5.02e-17	3.42e-16	12.821
1	5	1.35e-17	3.55e-16	3.955
1	7	-5.28e-18	3.50e-16	1.487
1	9	2.56e-18	3.52e-16	0.732
1	11	-1.43e-18	3.51e-16	0.404
1	13	8.71e-19	3.52e-16	0.248
1	15	-5.70e-19	3.51e-16	0.162
3	1	-1.59e-16	1.92e-16	45.223
3	3	4.35e-17	2.36e-16	22.627
3	5	-1.93e-17	2.17e-16	8.167
3	7	9.88e-18	2.27e-16	4.559
3	9	-5.58e-18	2.21e-16	2.464
3	11	3.40e-18	2.24e-16	1.540
3	13	-2.21e-18	2.22e-16	0.983
3	15	1.50e-18	2.24e-16	0.676
5	1	9.70e-17	3.21e-16	43.361
5	3	-3.00e-17	2.91e-16	9.342
5	5	1.57e-17	3.06e-16	5.391
5	7	-9.39e-18	2.97e-16	3.065
5	9	6.01e-18	3.03e-16	2.025



m	n	qo*u	ΣΣqo*u (kN)	Diferença Percentual (%)
5	11	-4.03e-18	2.99e-16	1.330
5	13	2.80e-18	3.02e-16	0.937
5	15	-2.01e-18	3.00e-16	0.666
7	1	-6.96e-17	2.30e-16	23.223
7	3	2.23e-17	2.52e-16	9.689
7	5	-1.24e-17	2.40e-16	4.916
7	7	8.00e-18	2.48e-16	3.331
7	9	-5.50e-18	2.43e-16	2.218
7	11	3.93e-18	2.47e-16	1.622
7	13	-2.89e-18	2.44e-16	1.173
7	15	2.17e-18	2.46e-16	0.892
9	1	5.43e-17	3.00e-16	22.077
9	3	-1.77e-17	2.82e-16	5.883
9	5	1.01e-17	2.92e-16	3.579
9	7	-6.75e-18	2.86e-16	2.309
9	9	4.84e-18	2.91e-16	1.693
9	11	-3.60e-18	2.87e-16	1.240
9	13	2.75e-18	2.90e-16	0.959
9	15	-2.14e-18	2.88e-16	0.739
11	1	-1.62e-16	1.26e-16	56.207
11	3	5.30e-17	1.79e-16	42.087
11	5	-3.08e-17	1.48e-16	17.214
11	7	2.10e-17	1.69e-16	14.183
11	9	-1.54e-17	1.54e-16	9.114
11	11	1.18e-17	1.66e-16	7.662
11	13	-9.24e-18	1.56e-16	5.579
11	15	7.37e-18	1.64e-16	4.717
13	1	-4.63e-17	1.17e-16	28.314
13	3	1.53e-17	1.33e-16	13.012
13	5	-8.95e-18	1.24e-16	6.751
13	7	6.18e-18	1.30e-16	5.000
13	9	-4.60e-18	1.25e-16	3.547
13	11	3.58e-18	1.29e-16	2.858
13	13	-2.86e-18	1.26e-16	2.217
13	15	2.32e-18	1.28e-16	1.843

m	n	qo*u	ΣΣqo*u (kN)	Diferença Percentual (%)
15	1	-9.57e-17	3.25e-17	74.624
15	3	3.16e-17	6.42e-17	97.160
15	5	-1.86e-17	4.55e-17	29.056
15	7	1.30e-17	5.85e-17	28.515
15	9	-9.77e-18	4.87e-17	16.695
15	11	7.68e-18	5.64e-17	15.754
15	13	-6.21e-18	5.02e-17	10.999
15	15	5.11e-18	5.53e-17	10.177

Conforme visualizado na Tabela 8 o somatório foi parado pelo critério dos números finais de m,n.

**Cálculo das constantes de (19):**

Constante da função:  
 $(16)/((\pi^3)*(a)) = 0.258 [1/m]$

$\Sigma\Sigma qo*u$  (conforme visualizado na Tabela) =  $5.53e-17[kN*m^2]$

Valor de  $qx(1,2)$ :  
 $qx(1,2) = 0.258*5.53e-17 = 1.43e-17 kN/m$

### CORTANTE NA DIREÇÃO Y - CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA SOBRE TODA LAJE

A cortante na direção y gerada pela carga uniformemente distribuída é definido pela função (20). Por meio da Tabela 9 é possível visualizar o valor do somatório e da diferença percentual, conforme variam os valores de m,n.

*Tabela 9 - Resolução do Duplo Somatório da Função da Cortante na Direção y.*

m	n	qo*u	ΣΣqo*u (kN)	Diferença Percentual (%)
1	1	3.92e-16	3.92e-16	-
1	3	-4.52e-16	-6.03e-17	115.385
1	5	3.38e-16	2.78e-16	560.345
1	7	-2.59e-16	1.88e-17	93.244
1	9	2.07e-16	2.26e-16	1106.504
1	11	-6.27e-16	-4.01e-16	277.243
1	13	-1.81e-16	-5.82e-16	45.225
1	15	-3.77e-16	-9.59e-16	64.671
3	1	-1.77e-17	-9.77e-16	1.841
3	3	4.35e-17	-9.33e-16	4.459

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN)	Diferença Percentual (%)
3	5	-5.35e-17	-9.87e-16	5.738
3	7	5.38e-17	-9.33e-16	5.452
3	9	-5.02e-17	-9.83e-16	5.387
3	11	1.66e-16	-8.17e-16	16.933
3	13	5.10e-17	-7.66e-16	6.247
3	15	1.10e-16	-6.55e-16	14.387
5	1	3.88e-18	-6.51e-16	0.592
5	3	-1.08e-17	-6.62e-16	1.656
5	5	1.57e-17	-6.47e-16	2.367
5	7	-1.84e-17	-6.65e-16	2.847
5	9	1.95e-17	-6.46e-16	2.930
5	11	-7.09e-17	-7.16e-16	10.991
5	13	-2.33e-17	-7.40e-16	3.255
5	15	-5.31e-17	-7.93e-16	7.173
7	1	-1.42e-18	-7.94e-16	0.179
7	3	4.10e-18	-7.90e-16	0.516
7	5	-6.33e-18	-7.97e-16	0.801
7	7	8.00e-18	-7.89e-16	1.004
7	9	-9.09e-18	-7.98e-16	1.153
7	11	3.53e-17	-7.62e-16	4.429
7	13	1.23e-17	-7.50e-16	1.611
7	15	2.93e-17	-7.21e-16	3.902
9	1	6.70e-19	-7.20e-16	0.0929
9	3	-1.96e-18	-7.22e-16	0.272
9	5	3.12e-18	-7.19e-16	0.432
9	7	-4.09e-18	-7.23e-16	0.568
9	9	4.84e-18	-7.18e-16	0.669
9	11	-1.96e-17	-7.38e-16	2.726
9	13	-7.07e-18	-7.45e-16	0.958
9	15	-1.75e-17	-7.62e-16	2.343
11	1	-3.67e-19	-7.63e-16	0.0482
11	3	1.08e-18	-7.62e-16	0.142
11	5	-1.75e-18	-7.63e-16	0.230
11	7	2.34e-18	-7.61e-16	0.306
11	9	-2.84e-18	-7.64e-16	0.373

m	n	qo*u	$\Sigma\Sigma qo*u$ (kN)	Diferença Percentual (%)
11	11	1.18e-17	-7.52e-16	1.542
11	13	4.37e-18	-7.48e-16	0.581
11	15	1.11e-17	-7.37e-16	1.479
13	1	2.23e-19	-7.36e-16	0.0302
13	3	-6.60e-19	-7.37e-16	0.0896
13	5	1.08e-18	-7.36e-16	0.146
13	7	-1.46e-18	-7.37e-16	0.198
13	9	1.79e-18	-7.36e-16	0.243
13	11	-7.57e-18	-7.43e-16	1.029
13	13	-2.86e-18	-7.46e-16	0.384
13	15	-7.36e-18	-7.53e-16	0.987
15	1	-1.45e-19	-7.54e-16	0.0192
15	3	4.31e-19	-7.53e-16	0.0572
15	5	-7.06e-19	-7.54e-16	0.0938
15	7	9.64e-19	-7.53e-16	0.128
15	9	-1.20e-18	-7.54e-16	0.159
15	11	5.12e-18	-7.49e-16	0.679
15	13	1.96e-18	-7.47e-16	0.261
15	15	5.11e-18	-7.42e-16	0.684

Conforme visualizado na Tabela 9 o somatório foi parado pelo critério dos números finais de m,n.

**Cálculo das constantes de (20):**

Constante da função:  
 $(16)/((\pi^3)*(b)) = 0.129$  [1/m]

$\Sigma\Sigma qo*u$  (conforme visualizado na Tabela) = -7.42e-16[kN\*m<sup>2</sup>]

Valor de  $qy(1,2)$ :  
 $qy(1,2) = 0.129*-7.42e-16 = -9.57e-17$  kN/m

### RESUMO DOS VALORES DE DESLOCAMENTO E ESFORÇOS

Na Tabela 10, pode ser visualizado o resumo dos valores de deslocamento e esforços internos para o ponto analisado.

*Tabela 10 - Resumo do Deslocamento e Esforços*

x (m)	y (m)	w (mm)	Mx(kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy(kN*m/m)	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
-------	-------	--------	------------	-------------	-------------	-----------	-----------

x (m)	y (m)	w (mm)	Mx(kN*m/m)	My (kN*m/m)	Mxy(kN*m/m)	Qx (kN/m)	Qy (kN/m)
1.000	2.000	0.624	0.813	0.370	-1.09e-33	1.43e-17	-9.57e-17

### DIAGRAMAS

Nas Figuras de 3 a 8, podem ser visualizados os diagramas do deslocamento e esforços internos.

Figura 3 - Diagrama do deslocamento transversal ( $w$ ).

#### Diagrama Deslocamento (mm)

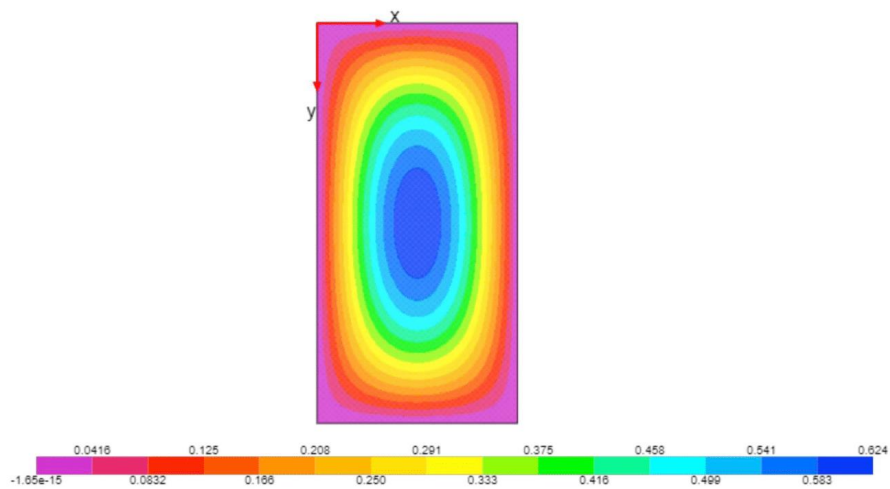


Figura 4 - Diagrama do momento fletor na direção x ( $M_x$ ).

Diagrama Momento em x -  $M_x$  (kN\*m/m)

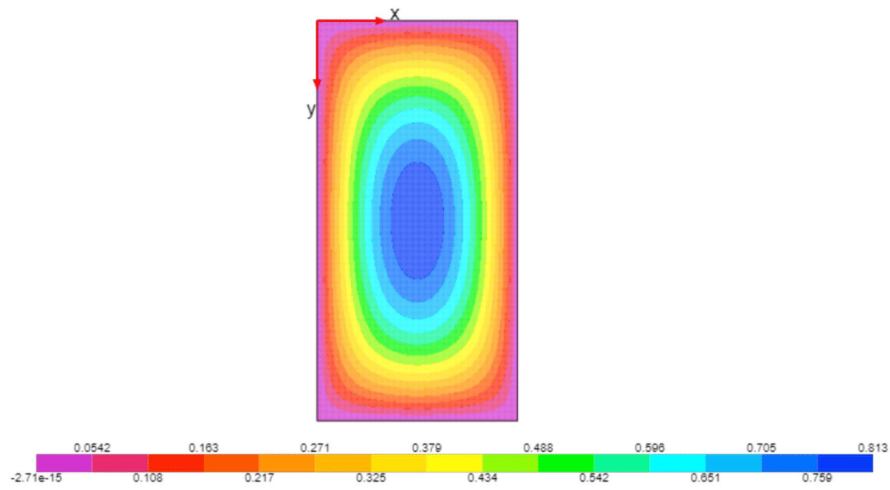


Figura 5 - Diagrama do momento fletor na direção y ( $M_y$ ).

Diagrama Momento em y -  $M_y$  (kN\*m/m)

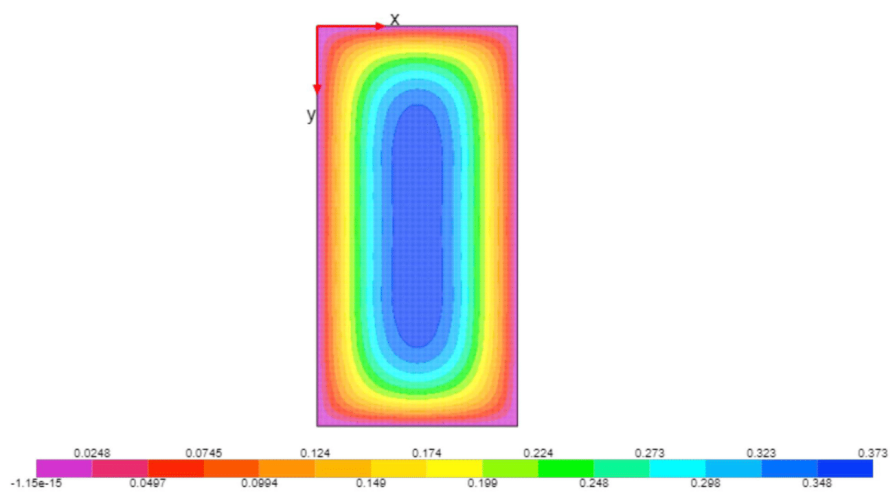


Figura 6 - Diagrama do momento torçor ( $M_{xy}$ ).

Diagrama Momento Torçor -  $M_{xy}$  (kN\*m/m)

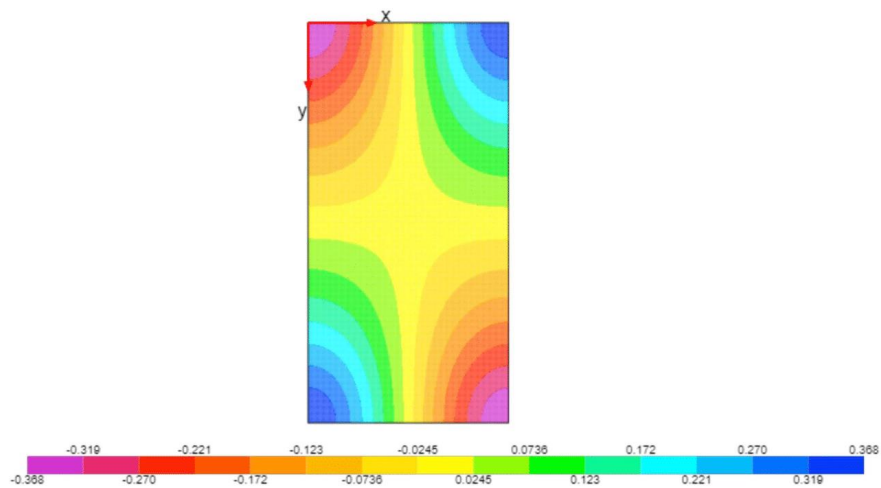


Figura 7 - Diagrama da cortante na direção x ( $Q_x$ ).

Diagrama Cortante em x -  $Q_x$  (kN/m)

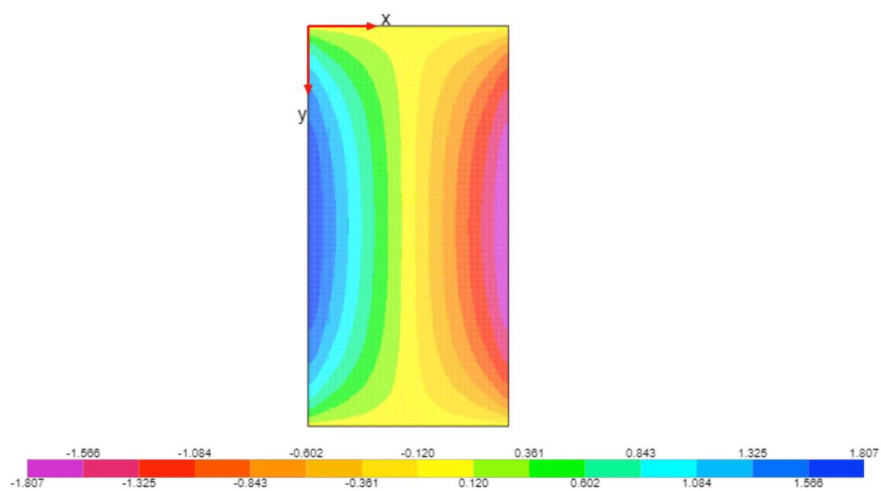
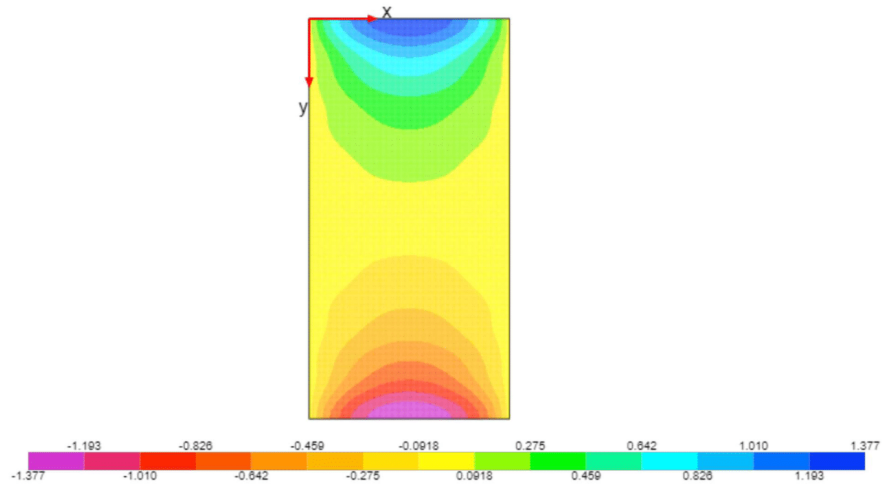


Figura 8 - Diagrama da cortante na direção y ( $Q_y$ ).

Diagrama Cortante em y -  $Q_y$  (kN/m)





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIAS, Nickolas Leitão. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande, 2019. Disponível em: <[https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2019-2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019-2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf)>. Acesso em: 06 jul. 2021.

SZILARD, Rudolph. **Theories and Applications of Plate Analysis: classical, numerical and engineering methods**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.

TIMOSHENKO, S. **History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. Nova York: McGraw-Hill, 1953. Reimpressão, Nova York: Dover, 1983.

## APÊNDICE A

Para resolver o duplo somatório presente nas funções de Navier, podemos calcular a expressão presente no duplo somatório para cada combinação de m,n e posteriormente somá-las. Segue um exemplo abaixo:

### EXEMPLO

- m,n varia nos ímpares até 3;
- x=1 e y=2;
- a=2 e b=4.

Considere o duplo somatório abaixo:

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}$$

Com isso:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} &= \underbrace{\frac{\text{sen} \frac{1\pi 1}{2} \text{sen} \frac{1\pi 2}{4}}{1 * 1 \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right]^2}}_{m=1, n=1} + \underbrace{\frac{\text{sen} \frac{1\pi 1}{2} \text{sen} \frac{3\pi 2}{4}}{1 * 3 \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right]^2}}_{m=1, n=3} + \\ &\underbrace{\frac{\text{sen} \frac{3\pi 1}{2} \text{sen} \frac{1\pi 2}{4}}{3 * 1 \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right]^2}}_{m=3, n=1} + \underbrace{\frac{\text{sen} \frac{3\pi 1}{2} \text{sen} \frac{3\pi 2}{4}}{3 * 3 \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right]^2}}_{m=3, n=3} \\ \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\text{sen} \frac{m\pi x}{a} \text{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} &= \underbrace{10,2400}_{m=1, n=1} + \underbrace{-0,5049}_{m=1, n=3} + \underbrace{-0,0623}_{m=3, n=1} + \underbrace{-0,0140}_{m=3, n=3} = 9,6868 \end{aligned}$$